



सत्यमेव जयते

**INDIAN AGRICULTURAL
RESEARCH INSTITUTE, NEW DELHI**

L.A.R. 16.

GIP NLK—H-3 I.A.R.I.—10-5-55—15,000

臺北帝國大學理農學部紀要

第五卷

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
No. 1.

Volume V.

1932-1933

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

CONTENTS

	<i>Page.</i>
ARAKATSU, B., OTA, Y. and KIMURA, K.:—The Continuous Spectrum of Hydrogen Associated with Each of the Lines in the Balmer Series. 	1
ARAKATSU, B. and KIMURA, K.:—On Some Peculiar Phenomena of the Electrodeless Ring Discharge through Hydrogen in a Long Tube. 	15
ARAKATSU, B. and OTA, Y.:—The Principle of the Conservation of Angular Momentum or the Principle of the Conservation of the Symmetry or Antisymmetry of the Total Wave Function (Bose- or Fermi Statistics) in Molecules? 	25
ARAKATSU, B. and KIMURA, K.:—The Activation of Air by the Electrodeless Ring Discharge. 	143
ARAKATSU, B. and UEMEURA, Y.: The Electrodeless Ring Discharge through Potassium Vapour. 	159
ARAKATSU, B.:—On the Anomalous Absorption of γ -rays. 	163
MATSUMURA, Sôji:—Ueber Flächen und Kurven (I). 	33
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (I). 	63
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (II). 	169
„ • :—Ueber Fläche und Kurven (II). 	207
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (III). 	247
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (IV). 	272
„ :—Ueber Flächen und Kurven (III). 	287
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (V).... 	303

MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln	
(VI)	347
„ :—Ueber Flächen und Kurven (IV); Charakteristische Eigenschaften der Homothetie von Eiflächen	369
„ :—Ueber Flächen und Kurven (V): Ueber Minkowskis Stützfunktion... ..	373
„ :—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (VII)	379

THE CONTINUOUS SPECTRUM OF HYDROGEN ASSOCIATED WITH EACH OF THE LINES IN THE BALMER SERIES§

B. ARAKATSU, Y. OTA and K. KIMURA

1 Plate and 4 Figures

(Accepted for publication Dec 11th, 1931)

I.

The continuous spectrum¹⁾ of hydrogen which originates near the limit (λ 3647 Å) of the Balmer series and extends far into the ultra-violet region was observed by astronomers for a long time. It was first ascertained by STARK, by the experimental study of the positive rays of hydrogen, that this spectrum was really due to the hydrogen atoms.

The theoretical interpretation of this continuous spectrum was given first by BOHR. According to his conception, if an electron of the kinetic energy $\frac{1}{2} mv^2$ impinges on a proton and forms a neutral atom in the discrete stationary state $n=2$ of the total energy W_2 , a spectrum, whose frequency ν be given by

$$\frac{1}{2} mv^2 - W_2 = h\nu,$$

is considered to be emitted. The spectrum must then originate just at the limit of the series ($h\nu = -W_2$) and extend to the shorter wave-length side with an intensity distribution corresponding to that of the kinetic energy of the electrons before the combination.

The existence of this spectrum was also explained afterwards, by SCHRÖDINGER in a new conception based on the view of the wave mechanics.

§) This paper was read before the anniversary meeting of the Physico-Mathematical Society of Japan, October 29, 1931.

1) Numerous literature is well summarized by Finkelburg. W. Finkelburg, Phys. Zeitschrift, 31, 1, 1930.

[Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan. Vol. v. No. 1, January, 1932.]

According to this theory, the element of the existence of this continuous spectrum was naturally derived from the wave equation of the atom as the eigen solutions corresponding to the positive continuous eigen values, and namely as a state existing in the oscillating system itself. It is demanded, also in this theory, that this continuous spectrum must be originated just at the series limit. No clear conception, however, was developed relating to the law to determine the intensity of this continuous spectrum.

Having observed this continuous spectrum by a method of the electrodeless ring discharge, HERZBERG²⁾ noted that, instead of beginning just at this limit, it extended somewhat into the region of the Balmer lines. Astronomers had long observed this phenomenon in stellar spectra so markedly that the continuous background had been clearly seen at the region 3700 Å³⁾. WRIGHT⁴⁾, having studied its intensity distribution, has noticed that the continuous spectrum is probably associated with each of the Balmer lines of higher terms and suspected then BOHR's stationary states might be broken beyond a limit.

Now, in the course of the study on the hydrogen spectra, a set of remarkable phenomena have been discovered by the present writers, that is, the continuous spectrum of hydrogen, when it is emitted from a stream of positive rays produced by a condensed discharge and also by an electrodeless ring discharge, is closely connected to each of the lines of the Balmer series, just as is the theoretical continuous spectrum to the series limit, and that the intensity of this continuous spectrum seems to be

-
- 2) G. Herzberg, *Ann. d. Phys.* 84, 565, 1927.
 3) I. Evershed, *Phil. Trans. A*, 197, 399, 1901.
 W. u. Lady Huggins, *Atlas of representative stellar spectra*.
 J. Hartmann, *Physik. Zeitschr.* 18, 429, 1917.
 W. H. Wright, *Lick Obs. Bull.* 9, 54, 1917.
 Publ. Lick Obs. 13, 256, 1918.
 Proc. Amer. Phil. Soc. 49, 530, 1920.
 Lick Obs. Bull. 10, 101, 1921.
 Nature, 109, 810, 1922.
 Ching-Sung Yü, *Lick Bull.* 12, 104, 1926.
 M. C. Johnson, *Monthl. Not.* 85, 813, 1925; 86, 300, 1926.
 4) W. H. Wright, *Nature*, 109, 810, 1922.

conditioned by the law which determines that of the line with which it is associated.

The careful observations of these phenomena have naturally led us to the following interesting conclusions.

First, as WRIGHT supposed, in an actual hydrogen atom situated in an inter-atomic complication, only a set of quantized states up to a definite one, corresponding to its relations to the surrounding ions, are allowable, but it becomes difficult for quantized states beyond this limit to exist and they are obliterated to melt into an unquantized continuous region.

Second, a collection of the ideal free hydrogen atoms does not emit the continuous spectrum originated just at the theoretical limit, i. e. the theoretical free hydrogen atom does not generally resonate (combine) with an electron which has an arbitrary amount of positive kinetic energy.

Third, the continuous spectrum of a perceptible intensity originates always at a certain line of the series, namely, the atom which takes a part in emitting the so-called continuous spectrum at series limit is the one that has a continuous region of this kind. In other words, only the atom which is so affected by the fields of the neighbouring atoms as to be able to have a continuous state in it can resonate (combine) with any electron which has an arbitrary amount (positive) of kinetic energy.

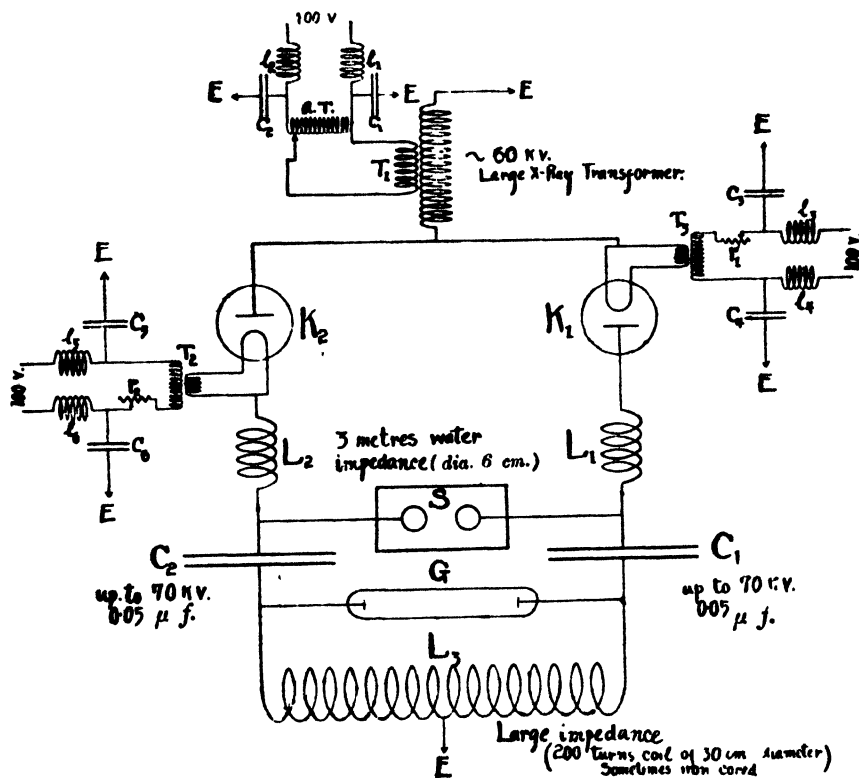
If we take an atom as the vibrating system and the electron impinging on it as a train of waves of a frequency corresponding to its kinetic energy, these phenomena are quite natural in view of the old undulatory theory of oscillators. Each of the particular solutions (including the continuous solution) of the SCHRÖDINGER's equation of free hydrogen atom is the element to produce the resonance beat phenomena in that atom; the actual resonance beat between a discrete element ($n=2$) and the positive continuous one can only occur when the atom has its own continuous region which may first excite itself in resonance to the coming electron wave and then beat with discrete eigen frequencies.

II.

To find if there exist some connections between the continuous spectrum of hydrogen and its series lines, the emission spectrum of this

gas is carefully observed in various excitations. The condensed discharge through a Geissler tube and the electrodeless ring discharge were found to be suitable for this purpose.

Fig. 1.



The experimental arrangements for the heavy condensed discharge are as shown in Fig. 1. Two high tension condensers specially made by SHIMAZU SEISAKUSHO, each with a capacity of 0.05 microfarads, are charged in a series by a large one-pole-earthed X-ray transformer from 100 kv., up to 140 kv., and discharged through a Geissler tube by means of a spark gap of two aluminium balls.

In experiments of this kind it is most undesirable that a back shock by the heavy discharge should sometimes disturb the main of the electric installation of the laboratory. To protect the main from this shock, two precautions are made, one is to insert a pair of small inductances (L_1) of suitable capacitances (C_1) to each of the primary circuits of the transformers, and the other, which is essentially effective for this purpose, is to have a set of water impedances L_1 and L_2 in the high tension circuit. By aid of these water impedances the transmission of all kinds of high frequency effects caused by the spark discharge back into the transformer systems are choked, especially the sudden change of the state of the electrostatic induction between the primary and the secondary wiring in the filament current transformer T_2 is quite reduced, so that no back effect is perceivable in the primary.

The filament current of the kenotrons K_1 and K_2 which are connected parallel to each other to the same pole of this transformer in the opposite directions, are so adjusted that the sparks are made one or two in one second. The inductance L_3 , which is inserted parallel to the Geissler tube G and earthed in the middle, is so provided for that no heavy spark can be made through S when no Geissler tube is inserted in G . By this equipment the follow through current through S and G , which may be caused after each of the discharges, can be perfectly reduced to zero, and consequently only a pure instantaneous high frequency current can be transmitted vigorously through the Geissler tube G . Thus we see that the brilliant radiation from G is due quite to this pure high frequency heavy current in it. The current density through the tube G is controlled by changing the spark length in S , by varying the inductance L_3 , or by making the tube in various dimensions.

We used, at first, a tube without any window, after being preheated and discharged for hours through a hydrogen current introduced by a hot paradium tube. It was found, however, that the experimental result with this tube were, as far as the aspect of the continuous spectrum in relation to the Balmer lines is concerned, of the same character as those with a tube which has a quartz window and is filled with hydrogen obtained by electrolysis.

III.

In discharging heavy condensed electricity through a Geissler tube of hydrogen in various current densities and pressures (from 0.001 mm. to 5 cm. of mercury) observations were made very conveniently by using, in most cases, HILGER's small quartz spectrograph.

Now, at the instance of the heavy discharge, the capillary part of the tube appeared brilliant pink-white, while the wider parts at the ends glowed red, characteristic of hydrogen. We found this glow was due to the neutralizing positive rays of the hydrogen atoms and was very likely to be observed for this purpose⁵⁾. By observing this part from the side of the tube, under various conditions of discharge, a set of plates was obtained (Plate 1). To obtain a spectrogram which shows the intensity distribution of the continuous spectrum in the right way, no condensing lens was used.

When the pressure was some hundredths mm. of mercury and the tube a large one, i. e. 4 cm. in diameter, we observed the lines up to the ninth or tenth of the Balmer series and the continuous spectrum originated sharply in its maximum intensity at the line of the highest member or the next appeared and gradually decayed in the region of 2000 Å⁶⁾. No secondary spectrum appeared.

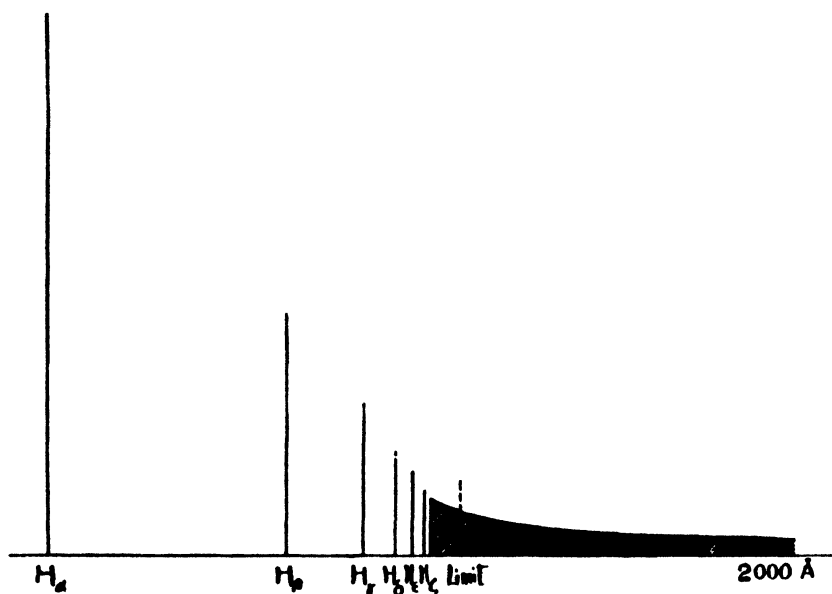
By increasing the pressure, the number of lines decreased one by one down to the 5th and the continuous spectrum originated always in its maximum intensity at the highest member line appearing in each case.

Thus we see that the continuous spectrum of hydrogen excited by a condensed discharge of this kind is, at least up to this stage, closely related with the line of the highest term appearing in each case, just as in the theoretical continuous spectrum with the series limit.

- 5) Analogous phenomenon was also found in the experiment of the electrodeless ring discharge.
- 6) These aspects were also well observed by us in the experiment of the electrodeless ring discharge, as first attacked by HERSBERG. A well developed continuous spectrum associated with the lines near the limit of the Balmer series is observed. This will be written up later in detail.

It is to be noticed here that, in all of the above stages, the intensity of the continuous spectrum at its head is continuous with that of the last line at which the continuous spectrum begins. The photometric observations (which will be reported later) give the following diagrammatic intensity aspect (Fig. 2).

Fig. 2.



The intensity of the continuous spectrum decays from the head very gradually to the far ultra-violet region, indicating no special irregularity on passing the limit of the Balmer series. We observed, moreover, in every region of wave lengths the intensity of the continuous spectrum became stronger and well developed as the head began at a line of the lower member of the series. Thus we see the intensity of the continuous spectrum is closely related with that of the line with which it is associated.

Now, when the pressure of hydrogen was increased to two or three millimeters of mercury and the diameter of the discharge tube was some

mm the spectrogram was composed of the diffuse first few lines of the Balmer series (up to H_4), and the well developed continuous background originated from H_4 .

We noticed at once that the intensity of this continuous background increased abruptly by passing each of the lines which appeared. In some plates, a marked continuous spectrum was not observed between H_4 and H_5 , but just originated at H_5 in marked intensity, while in some others it originated at H_4 in a similar way.

By increasing the pressure (up to some cm.) and the current density in the tube, we observed, by and by, the continuous spectra of the lower members more intensely. The strongest one among them displaced itself from the higher to the lower one as the density of the ions surrounding the radiating atom increased, and the Balmer lines disappeared one by one. In the final instance, only the well developed H_4 -continuous spectrum was observed⁷⁾. We tried in vain to obtain a spectrogram in which a continuous background of appreciable intensity extended further over this line into the infra-red region.

IV.

These phenomena have naturally led us to conclude that the origin of this continuous spectrum must be attributed to the atoms in neutralizing states. BOHR-SCHRÖDINGER's theory of the hydrogen atom is valid naturally only for an isolated free atom in its form. When the radiating atom, however, is surrounded by the ions of atoms or molecules, it becomes difficult for the states of the higher principal quantum number to exist quantized. They are obliterated to melt into an unquantized state⁸⁾. Thus we see, as WRIGHT⁹⁾ suspected, in some of the radiating atoms

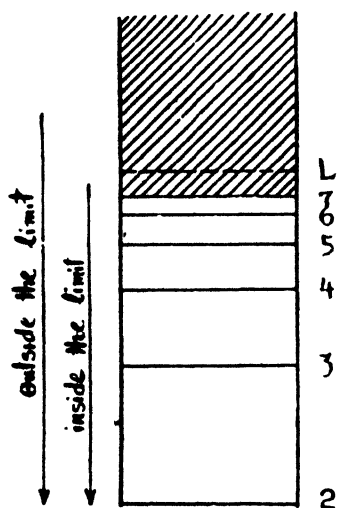
7) The phenomenon of this last stage was beautifully observed by Hulburt. E. O. Hulburt, Phys. Rev. 36, 13, 1930.

8) We may then, for convenience, assign a name α (β , γ , δ ,.....) to the continuous spectrum sharply originated from the lines $H\alpha$ ($H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$,.....) and also to the state of an atom in which only a set of quantized states up to the principal quantum number 2, (1 , 2, 3,.....) is allowable.

9) Wright, Nature, 109, 810, 1922.

only a set of quantized states up to a definite one, corresponding to the relations with the surrounding ions, are allowable, but quantized states beyond this limit become diffuse to build a continuous state.

Fig. 3.



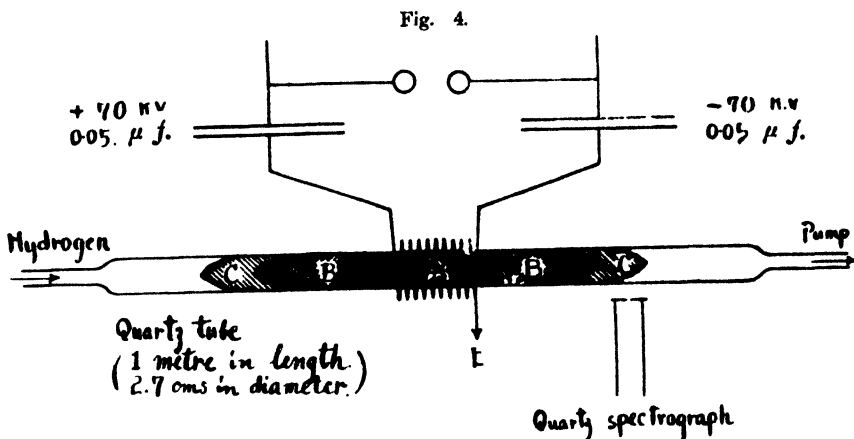
The existence (as well as the intensity) of the continuous spectrum is found closely conditioned by the law to determine the intensity of the line to which it is related, or, namely, by the existence of this continuous state beyond the limit which is the upper state of the line with which the continuous spectrum is associated. We can thus suspect at once that one of the factors in determining the intensity of the continuous spectrum is just one of the factors of the so-called transition probability of the associated line. The wave function of the upper state related to the line is now considered to take a

part in determining the condition of the existence and the intensity of its associated continuous spectrum.

These considerations are quite natural if we are reminded of the intensity diagram mentioned above, namely, the fact that the intensity of the continuous spectrum at its head is equal to that of the last line to which this head adjoins. Combining this aspect with the fact that the continuous spectrum is smoothly developed from a Balmer line not only down to the position of the series limit but also over this (without showing any irregularity there) far into the ultra-violet region, we are naturally led to conclude that the existence of the continuous region beyond a limiting quantum number is a necessary condition for the development of this continuous spectrum which appeared always associated with the line, the "upper" state related to which is the limit of the allowable quantum state.

V.

To ascertain if these aspects of phenomena be also observed further for the line of the higher terms in the series, a method of the electrodeless ring discharge was employed, since this discharge can be made through the gas of very high vacuum and therefore one is likely to observe the Balmer lines up to the higher members. To excite the tube, the condensed discharge apparatus above described was used. The primary coil, which was wound ten turns untouched around a quartz tube of one metre in length and 2.7 cm. in diameter, was earthed at one end. (Fig. 4).



- | | | |
|---|--|---|
| A: Pink white.
Balmer line (first few ones).
Secondary spectrum.
Continuous spectrum from
visible far into the
ultra-violet. | B: Pink red.
Balmer lines.
Continuous spectrum
from a certain line. | C: Deep red.
Balmer lines.
Continuous spectrum
from the last line
observed. |
|---|--|---|

When a heavy condensed discharge was made through the primary coil the hydrogen gas in the tube glowed brilliantly under good conditions¹⁰. We noticed that the glow in B and C, which extended sometimes about 20 cm. from the end of the coil, was due to the positive rays of the hydrogen atoms which were excited in A and expelled by the electrostatic field between the ends of the coil. These parts (especially

C) were observed by a small quartz spectrograph without any condensing lens. One of the spectrograms is reproduced in Plate 1 (e, f).

We could thus extend the range of the observations of phenomena up to the higher members by decreasing the pressure of the gas in the tube even down to the stage at which the glow is due quite to the hydrogen atom liberated from the wall of the tube at the instance of the discharge; the electrons (repelled in the opposite direction) reach then to the end of the tube. As one sees, the phenomena have quite the same character as those observed in the condensed discharge experiments, except that the widths of the lines appear in descending order as the number of terms ascends¹⁰⁾.

The continuous spectrum originated also in this case always at the last line observed and developed from there smoothly over the series limit to far ultra-violet. The intensity of the head of the continuous spectrum is in every case, equal to that of the last line with which this continuous spectrum associated.

Thus we see that the inference we made in previous sections can be made too for the continuous spectrum associated with the lines of higher members.

Now we can infer that a collection of free hydrogen atoms emit the theoretical continuous spectrum at the series limit with the intensity of the limiting line of the series, which is nil, or in other words, the theoretical continuous spectrum at series limit does not exist in nature.

VI.

Since "the continuous spectrum at series limit" is thus originated always at a certain line of the series with the intensity of this line. It seems to us that the law to determine the intensity of the continuous spectrum may be derived by the law to determine that of the line with which this continuous spectrum necessarily associates. The quantum states beyond the upper one of this line melt into a continuous

10) The details of the appearance will be reported later.

region. Being the continuous spectrum (which extends far into ultra-violet) able to develop only when this continuous region exists, we can conclude that the coming electron combines first with the proton in this continuous state having its whole energy in the atom system involved, and then transits to a discrete state ($n=2$ in this case) with the probability of a line the upper state of which is its limit for this continuous state.

If the proton is in its free state, it will be naturally inferred that no electron can combine with it, since, in this case, it is impossible to form first a continuous state and, therefore, the coming electron combines in a discrete quantum state with a transition probability, (o), of the line of the series limit.

This inference elucidates not only the mechanism of the emission of the continuous spectrum in association with the series line but also that of the combination of an electron with a proton.

If we consider the proton and the electron as a train of waves and the state of the atom system as the stationary wave of these two, or an oscillating system made up of them, we can express the above phenomena roughly in the following way.

BOHR-SCHROEDINGER's theory of hydrogen atom expresses the free states of these oscillators. If an electron of an arbitrary amount of kinetic energy impinges on a free proton, no resonance occurs between them, the waves pass by without interfering with one another, the electron will then pass through, or reflect from, the proton, probably because there is no commensurable harmonics between the discrete frequency (energy) of this oscillator and the arbitrary amount of kinetic energy (frequency) of the electron.

When the proton is situated in an intra-atomic complication and is affected by the field¹¹⁾, the waves of the proton and the electron are modified so as to form an oscillating system having a continuous region

11) The arguments on the instability of an quantum state in a field will be discussed later in combination of the results of TraubenberG-Gebauer.

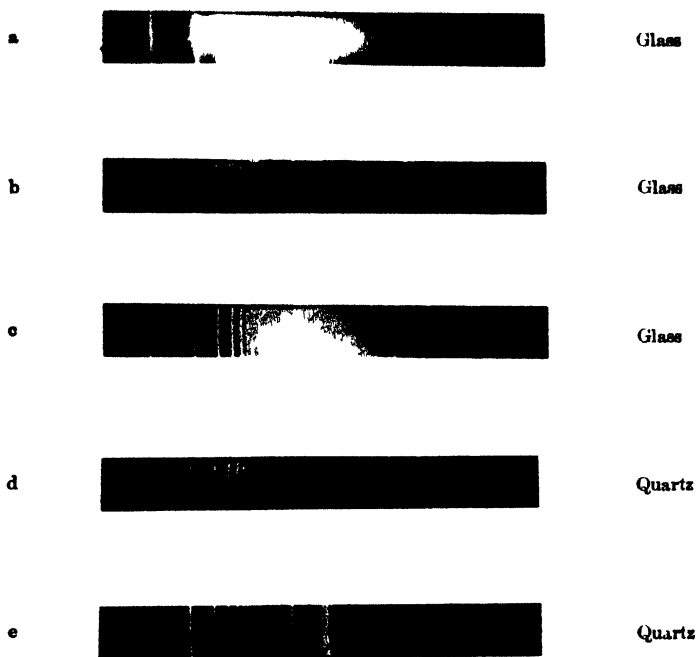
H. Rausch v. TraubenberG u. R. Gebauer, *Naturwiss.* 18, 132, 1930.

H. Rausch v. TraubenberG, R. Gebauer, G. Lewin, *Naturwissenschaften*, 19, 417, 1930.

R. Gebauer und H. Rausch, *ZS. f. Phys.* 71, 201, 1931.

of frequency, or what is the same thing, when the oscillator has commensurable harmonics with the frequency of the coming electron wave, there can occur the resonance (transition or combination) phenomena to form a system of stationary waves, a state in the continuous region. Thereafter, the beat phenomena take place with any of the discrete states which are the quantum theoretical harmonics. This is very natural in view of the old theory of oscillators.

These considerations, with further experimental studies of allied phenomena, will throw some light on the view of the theory of wave mechanics and the quantum physics.



a, b, c, and d: Condensed discharge.
 e : Electrodeless discharge.
 f : Enlarged plate of e.

B. Arakatsu, Y. Ota and K. Kimura. The continuous spectrum of hydrogen associated with each of the lines in the Balmer series.

ON SOME PECULIAR PHENOMENA OF THE ELECTRODELESS RING DISCHARGE THROUGH HYDROGEN IN A LONG TUBE.

B. ARAKATSU and K. KIMURA

3 Figures

(Accepted for publication Jan. 21st, 1932)

In the course of the study on the continuous spectrum of hydrogen associated with each of the Balmer lines⁽¹⁾, a method of electrodeless ring discharge was employed. During the experiment with this method, especially when applied to a long tube, a series of interesting phenomena were observed. Some of them are described in the present paper.

A quartz or glass tube (XY in Fig. 1) of one meter in length and about 3 cms. in diameter was wound around, without being touched, with thick aluminium wire using about ten turns in 10 cms. Through this "primary coil" the condensed discharge was made at the rate of one or two per second by the apparatus previously reported⁽¹⁾. Rough calculations show that the discharging current in the coil reaches some thousands amperes in a period of $1/100000$ second and the power of the discharge is about 25000 KW. By this heavy discharge, an enormous amount of variation of the magnetic field was produced and consequently a sufficiently intense electro-motive force could be induced in the tube to excite very strongly gas under suitable pressure.

The hydrogen used was sometimes introduced through a hot palladium tube, but it was generated in most cases by the electrolysis of a dilute aqueous solution of phosphorous penta oxide and introduced into

(1) B. ARAKATSU, Y. OTA, and K. KIMURA, *Memoirs of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ.*, Vol. V, 1, 1932.
[*Mem. of the Fac. of Sci. & Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan*, Vol. V., No. 2, Art. 1, March, 1932]

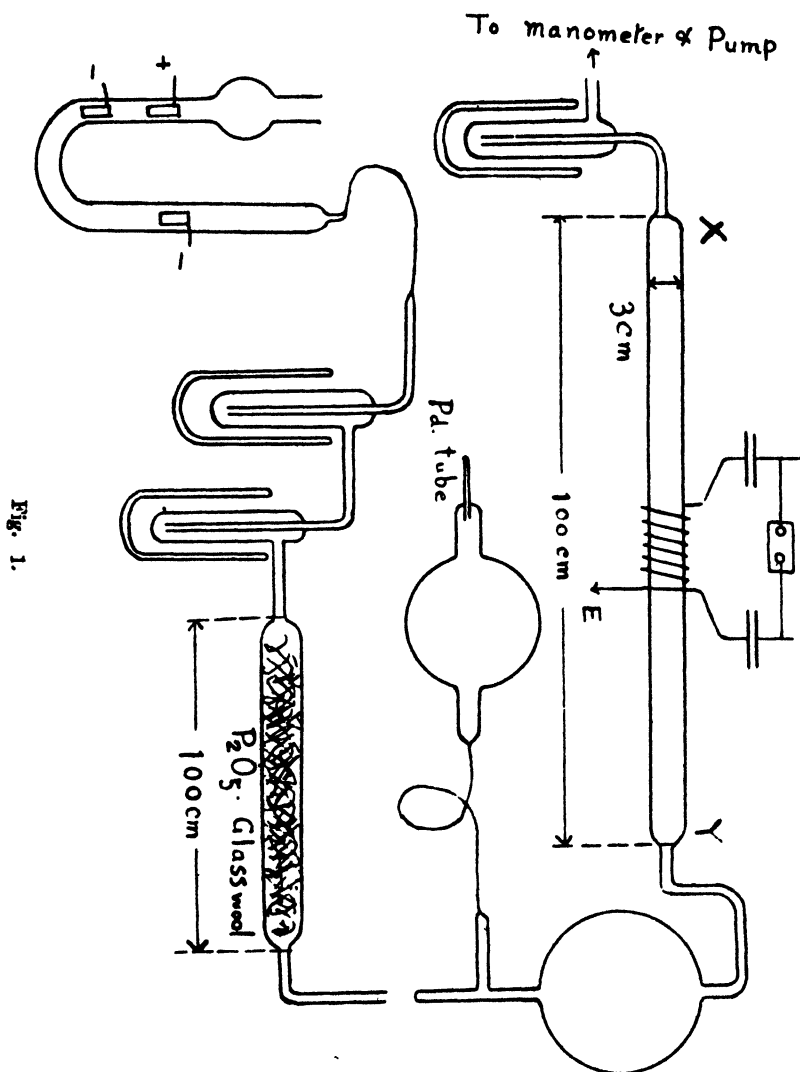


Fig. 1.

the discharge tube, in the manner which Wood⁽²⁾ originally employed. The automatically regulating function of this method was found to be very

(2) R. W. Wood, Proc. Roy. Soc. 97. 445, 1920.
 Phil. Mag. (6) 42. 729, 1921.
 Phil. Mag. (6) 46. 605, 1923.

convenient in running the experiment for a long time. After passing a capillary tube of suitable dimensions, the gas was introduced through a desiccating tube of about one metre in length and two traps to the discharge tube (XY).

Since it was found that a trace of mercury vapour in the tube remarkably affects the nature of the phenomena, precautions were made to experiment under conditions quite free from this gas.

In order to expell the air and other impurities from the tube, the pump and the gas generator were continuously operated through-out the week before the experiment was commenced, during which the discharges were made intermittently.

(II)

As long as the pressure of the gas was higher than a millimeter of mercury, no glow was observed in the tube when heavy condensed discharges were made through the primary coil. When the pressure reached about 0.5 mm. the hydrogen gas began to glow pale-white, the spectrum of which, when it was observed by a hand spectroscope, was continuous and extended from the yellow to the limit of the visible spectrum in the violet, (The first stage).

As the gas in the tube was further evacuated, down to about 0.2 mm., we noticed a blue line (H_{β}) in this continuous background, while H_{α} could hardly be detected in this case. A weak Fulcher band was sometimes observed. (The second stage).

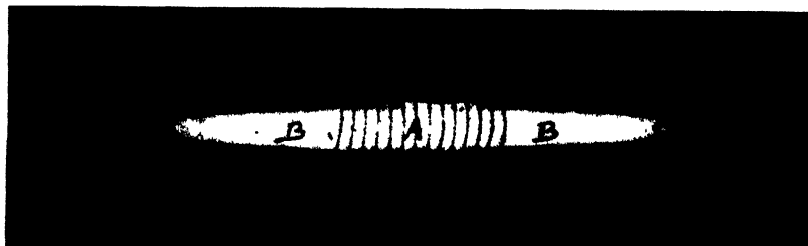
Up to this stage the glow was observed only in the part of the tube around which the primary coil was wound. When the pressure decreased down to 0.1 mm. the glow abruptly changed its colour to light pink extending somewhat out from the coiled part. The hand-spectroscopic observation in the coiled part then revealed the brilliant Balmer lines H_{α} , H_{β} and H_{γ} with the strong secondary spectrum on a weak, continuous background. (The third stage).

Further evacuation resulted in extending the column of the glow

out from the coiled part of the tube. At a pressure of about 0.01-0.005, the brilliant pink glow extended about 20 cms. from the ends of the coil on each side. (The fourth stage).

It is very interesting that there was no striation observed throughout this glowing column 50 cms. long, but only the variations of the colour in the different parts of the glow. Thus part A glowed brilliant pink-white tinted somewhat with blue-violet, part B pink-red, while part C was distinctly deep red⁽³⁾.

Fig. 2.



At this stage, we noticed a fluorescent glow on the inner wall of the glass tube due to the bombardment of electrons, especially when the gas was evacuated down to 0.001 mm. and the great majority of the glowing atoms seemed liberated from the inner wall of the tube at the instance of the discharge. These aspects were not affected when a point of the primary coil was earthed.

(III)

The spectrographical observations on the different parts of the glow were interesting. The spectrum of the glow in the coiled part A was of a similar character to that of the ordinary Geisler discharge, namely, the first few Balmer lines with the secondary spectrum, covered by a weak, continuous one extending from the visible part of the spectrum to the ultra-violet region, which is, by some writers,

⁽³⁾ J. J. THOMSON, Phil. Mag., (2), p. 674, 1926.

accepted as the Zerfallsleuchten of the molecules⁽⁴⁾. In part B, out of the coil, one could hardly observe either the secondary spectrum or the continuous spectrum of the type just mentioned. But the Balmer lines developed well in this part up those from the tenth to the fifteenth member (or more according to the pressure of the gas) associating with the continuous spectrum which always originated at the last line of the observed Balmer lines in the same manner as the theoretical continuous spectrum related to the limit of the series⁽⁵⁾. The glow in part C revealed a spectrum of the same character as in part B, except for a slight difference in the distribution of the intensity among the lines and the sharpness of the association of the continuous spectrum with the last line which appeared in the spectrogram.

The so-called water-bands at λ 3064Å and λ 2811Å were sometimes well observed.

(IV)

The glow in parts B and C must be considered, now without doubt, to be due to atoms in the neutralizing states. These atoms could not have been produced by the excitation caused by the rapid variation of the stray magnetic field, because the spectrum of this part is of quite different character from that of part A. In order to ascertain this, a tube of equal diameter was situated coaxially out of a coil. No glow was observed until one end of the tube was inserted some cms. in the coil. They also could not have been excited by the bombardment of the electrons on the hydrogen molecules there, since the spectrum must then have been accompanied by the intense secondary spectrum, as one usually experienced. The spectrum observed end-on showed some Doppler effect. From these facts we could ascertain that they are the positive rays of the hydrogen atoms which were first excited by the rapid varia-

(4) P. M. BLACKETT and J. FRANK, *ZS f. Phys.* 34, 349, 1925.

J. G. WINANS and E. C. G. STUCKELBERG, *Proc. Nat. Acad.* 14, 807, 1923.

W. FINKELNBURG, *ZS. f. Phys.* 62, 624, 1930.

(5) B. ARAKATSU, Y. OGA and K. KIMURA, *Memoirs of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ.*, Vol. V, 1, 1932.

tion of the magnetic field in part A and then expelled by the electrostatic field set up between the ends of the inducting coil at the instance of the discharge.

The electrons are naturally expelled in the opposite direction. The fluorescence on the inner wall of the tube mentioned in the previous section is now found to be due to these electrons.

This method is thus found to be useful in separating a group of protons from one of electrons.

(V)

It is to be remarked here that, notwithstanding the intense Balmer lines, the secondary spectrum could scarcely be observed in parts B and C. The positive rays of the atoms in the neutralizing states are considered to recombine naturally in these parts into the neutral hydrogen molecules. If one of the combining atoms were an excited one, the secondary spectrum would have been observed in an intensity comparable with that of the Balmer lines. Hence it must be inferred that the hydrogen molecules are generally formed with two hydrogen atoms both in the ground level ($n=1$), probably in a manner of Heitler-London theory⁽⁶⁾ of homopolar combination. What is the reason, then, that the molecules are not formed from the atoms in excited states? The answer to this question is very simple, namely, this is due only to the difference of the mean life of the states. The life of the ground level is considered to be infinitely great in comparison with that of the excited ones. Otherwise the Heitler-London theory must be considered as losing its applicability to excited atoms. We see, thus, the secondary spectrum is emitted only when the molecules are directly excited by some cause, or when the atoms in excited states combine by chance in the presence of some catalytic agencies⁽⁷⁾. After the molecules once split up, the emission spectra of hydrogen are in general the Balmer lines and their associated continuous spectrum.

(6) W. HEITLER and F. LONDON *Z. f. Phys.* **44**, 455, 1927.

Y. SUGIURA.

Z. f. Phys. **45**, 434, 1927.

(7) R. W. WOOD. Above quoted.

The observation of the Lyman region and the Werner band, for which we are now arranging, will elucidate the facts decisively.

(VI)

The phenomenon that H_β appears, at the second stage of the discharge, more intensely than H_α , was also previously observed by many writers⁽⁸⁾. It will be useful here to call to our attention the study of Wachsmuth and Winawer and of Jung⁽⁹⁾.

According to them, the pressure-conductivity relation of the hydrogen gas in a tube of the electrodeless ring discharge was shown diagrammatically as in Fig. 3.

By decreasing the pressure, the mean free path of the hydrogen molecules is naturally increased and hence the degree of the excitation of the molecules.

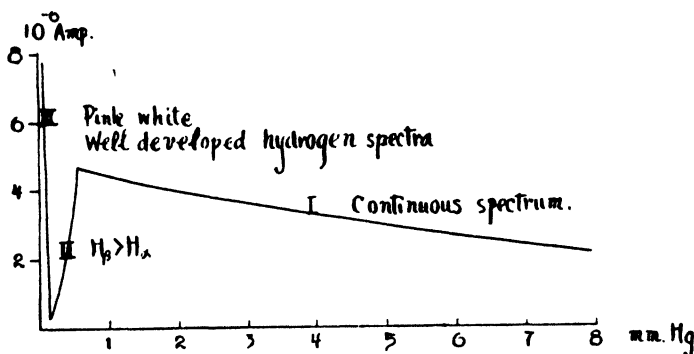


Fig. 3.

The numbers I, II, and III were given by us in order to show the corresponding stages of the discharge in the present experiment, which were described in the previous section. The condition in the first stage

(8) I. K. ROBERTSON, Proc. Trans. Roy. Soc. Canada, 16, 151, 1922.

J. MASSON, Nature, 92, 503, 1914.

M. SCHLESINGER, Z. f. Physik, 38, 215, 1926.

(9) R. WACHSMUTH and B. WINAWER, Ann. d. Physik, 42, 585, 1913.

H. JUNG, Ann. d. Physik, 75, 201, 1924.

of the present experiment is found also to correspond to that of the excitation by the bombardment of electrons whose energy is under 12.6 volts, for we know in that case, for example, with Horton and Davies⁽¹⁰⁾, that "a glow whose spectrum was continuous and extended from the yellow to the limit of the visible spectrum in the violet, was obtained at lower voltages than either the Balmer lines or the lines of the hydrogen secondary spectrum, and without any ionization occurring."

The excitation in the second stage seems to correspond to that caused by the electrons of about 12.6 volts, by which the hydrogen molecule is said to be split up into normal atom and an excited (not ionized) one. This consideration harmonizes with the fact that the conductivity of the gas is minimum in this stage.

The principal quantum number of the state of this excited atom, or the quantum number of the electronic state of the molecule just before the splitting up is reasonably supposed to be four or, at most, five. If so, the fact that H_γ appears stronger than H_β in this stage can be anticipated in the following way.

Let $T_{i,f}$ be the transition probability between two states whose principal quantum number are "i" and "f" respectively, then, since the initial state of all of the excited atoms is considered to be of the same quantum number, say four, the intensity of H_α and H_β should be anticipated as

$$J_\alpha = \frac{T_{4,3}}{T_{4,3} + T_{4,2} + T_{4,1}} \cdot \frac{T_{3,2}}{T_{3,2} + T_{3,1}}$$

and

$$J_\beta = \frac{T_{4,2}}{T_{4,3} + T_{4,2} + T_{4,1}} \cdot$$

respectively, provided that the effect of the reversal phenomena in the radiation-atom system is neglected.

The supposition that the hydrogen molecule in this stage may split up when it is excited to an electronic state of the quantum number four, may be justified as follows.

(10) F. HORTON and A. C. DAVIES, *Phil. Mag.*, 46, 872, 1903.

The energy-distance diagrams of the different states of the hydrogen molecule under this pressure may be distorted some-what, especially those of the higher quantum states become flat. If, then, an electron in a molecule of 1Σ state (and also of a higher vibrational state) be excited to an electronic state of the higher quantum number, say 4Π the molecule must split up, in consequence of its instability, into a normal atom and an excited one whose quantum number is 4. .

A higher state than this is probably, in this case, diffused to the continuous region of the kind that we described in the previous paper.

The Principle of the Conservation of Angular Momentum or the Principle of the Conservation of the Symmetry or Antisymmetry of the Total Wave Function (Bose or Fermi Statistics) in Molecules ?

B. ARAKATSU and Y. OTA

(Accepted for publication March 15th, 1932)

I. Introduction.

Raman¹⁾ has recently reported "an experimental proof of the spin of the photon" by observing the amount of the depolarization of the Raman spectra of various gases and liquids. According to the conception²⁾ of the spinning photon, "it possesses besides energy $h\nu$ and linear momentum $\frac{h\nu}{c}$ also an intrinsic spin or angular momentum $\pm \frac{h}{2\pi}$ round an axis parallel to the direction of its motion." The various states of polarization of light are regarded as characterised by their different chances of possessing spin with two alternative signs. The selection rules $\Delta K=0, \pm 2$ in the rotational Raman spectra of simple diatomic molecules, which were empirically established by Wood³⁾ and Rasetti⁴⁾, have simply been derived by him on the basis of the principle of the conservation of angular momentum in the scattering process.

- (1) C. V. RAMAN and S. BHAGAVANTAM,
Nature, 123, 114, 1931; 123, 545, 1931; 129, 22, 1932.
Indian Journal of Physics, XV, 353, 1931.
- (2) P. A. M. DIRAC, "Quantum Mechanics," p. 131, 1930.
- (3) R. W. WOOD, Phil. Mag., 7, 744, 1929.
R. W. WOOD and G. H. DIEKE, Phys. Rev., 35, 1355, 1930.
- (4) F. RASETTI, Nature, 123, 205, 757, 1929.
Proc. Nat. Acad. Sci., 15, 234, 515, 1923.
Phys. Rev., 34, 367, 1929.
Zeitschr. f. Phys., 61, 589, 1930.

[Mem. of the Fac. of Sci. & Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V., No. 2, Art. 2, March, 1932.]

This principle was early described by Sommerfeld¹⁾ in the chapter of his first attack on the relation of waves and quanta. The "Ether" in Sommerfeld's description has been replaced by Raman by the "Photon". According to the latter writer, the photon which has initially a spin equal to $+\frac{h}{2\pi}$ (or $-\frac{h}{2\pi}$), may either retain the same value or change its sign to $-\frac{h}{2\pi}$ (or $+\frac{h}{2\pi}$) as the result of the scattering process. The change in spin of the photon is thus 0 or 2 Bohr units. The corresponding change in the rotational quantum number of the molecule would be equal but opposite in sign, and would therefore be 0 or ± 2 .

It is interesting to discuss here the boundary of the applicability of this simple and direct model-like explanation and to see if it harmonizes with other allied phenomena.

II. Compton-Effect.

Since the idea of the spinning photon originated from that of the spinning electron, which is derived by the model-like consideration of spectroscopic duplity, these two spinning "particles" are in dual relation in the conception. The electron is, ab initio, possessed of its intrinsic angular momentum $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, so the electron without spin is inconceivable from this point of view.

Now, considering the scattering process in the forward direction caused by the photon $h\nu \left(+\frac{h}{2\pi}\right)$ impinging on a free electron $+\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, we can easily predict, on the basis of the above mentioned conception of the conservation of angular momentum, the Compton effect $h\nu' \left(+\frac{h}{2\pi}\right)$ as well as the unmodified scattering $h\nu \left(+\frac{h}{2\pi}\right)$. If we hold moreover, the assumption that when an electron (or a system of electrons) gives up part of its energy to the surrounding ether (photon), the angular momentum $\left(+\text{ or } -\frac{h}{2\pi}\right)$ must also necessarily be given up together, then no antistokes Compton effect is anticipated, since otherwise the photon must be capable of the angular momentum of two Bohr's units, which contradicts the starting assumption.

(1) A. SOMMERFELD, *Atombau u. Spektrallinien*, p. 333, 4th Edition.

If the photon $h\nu$ ($-\frac{h}{2\pi}$) collides with a free electron ($+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$), it is also subjected to the Compton Effect $h\nu'$ ($-\frac{h}{2\pi}$) besides the unmodified scattering $h\nu$ ($-\frac{h}{2\pi}$). In this case, however, it may happen that the whole of the energy, together with the spin ($-\frac{h}{2\pi}$), of the photon be taken up by the electron ($+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$), which results in changing its sign to ($-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$) and carrying the energy $\frac{1}{2}mv^2 (= h\nu)$. This is a case of photo-electric phenomena. It is to be remarked here that we are not insisting upon this mode of description in interpreting the actual phenomena, but are inferring further according to Raman's conception and finding the results which are (or are not) in harmony with experiments.

Since the scattered photon always retains its spin vector in the same sign referred to the direction of its motion, no variation takes place in the nature of the states of polarization by this scattering process unless the electron could possess angular momentum more than $\frac{1}{2}$ unit of the quantum $\frac{h}{2\pi}$.

The fact that the Q Q branch appears in the higher vibration-rotation Raman spectra tells us that the photon can give to an electron or to a system of electrons a part of its energy with, as well as without, its angular momentum.

III. The Selection Rules and the Polarization Principle.

The conception of the angular momentum of the photon is, as is described in Sommerfeld's work, closely connected with the selection rules $\Delta l = \pm 1$ in the radiation process of atoms. When an atom rearranges its configuration, it absorbs from, or emits to, the surrounding ether annihilating or creating photon respectively. The spectroscopic rule $\Delta l = \pm 1$ reconciles itself to the conception of the spinning photon ($\pm\frac{h}{2\pi}$), provided that l , as is used in the model-like spectroscopic explanation, is the number of the quanta of the angular momenta of the atom system and that the conservation principle holds during the photon-atom interaction.

The photon emitted by an atom is necessarily shot out (propagated) uni-directionally. The photon emitted by the process $\Delta l = \pm 1$ in the atom must possess its angular momentum $\mp\frac{h}{2\pi}$, where l denotes

the component of the angular momentum of the atom in the direction of the motion of the emitted photon.

Among the selection rules $\Delta j = 0$ or ± 1 , the first one, $\Delta j = 0$, is a little difficult to accept as compatible with the conservation principle among the angular momenta in the atom-photon system, provided that j means the number of the quanta of the total angular momentum in the atom.

As a matter of fact, it is meaningless, in this respect, to believe in the existence of the angular momentum of this kind if it is not conserved in a certain system.

We must then either alter the meaning of l and j or abandon the conception of the spinning electron and photon. The means to avoid these difficulties is to accept, besides the spinning ones, the existence of the photon whose angular momentum is zero, and which is assumed to be linearly polarized.

This latter conception is a contradiction to Raman's proposition stated in the first paragraph of this paper. If we take, however, this non-spinning photon as persisting in its nature in the interaction with atoms and molecules, we may account for the intensity of the QQ branch in Raman spectrum as partly due to the non-spinning photon. The selection rules $\Delta K = 0, \pm 2$ in the scattering process are, of course, retained. As to the states of the polarization in a statistical conception, the non-spinning photons have naturally the same character as the aggregation of the photons of two opposite signs in an equal chance.

These additional properties in the conception of the photon are thus, up to this point, compatible with experimental facts. But the dual conception among the photon, the electron and the proton lead us to believe the existence of the non-spinning electron and proton. Though the various attempts to find direct evidence of the existence of the spin of the free electron and proton have hitherto failed, it is fairly difficult in these days either to dare to deny entirely the spinning electron or to believe in the partial existence of the non-spinning one.¹⁾

Turning to the point of view of wave mechanics, we find the selec-

(1) Quite recently, "Versuche zum Nachweis einer Polarisation der Elektronen" is nicely done by Rupp. E. Rupp, Physik. Zeitschr., 33, 158, 1932.

tion rules $\Delta n=0, \pm 1$ and the polarization principle in an electric field are naturally derived from the conception of the transition probability by calculating the matrix elements $\int x\psi_n\tilde{\psi}_{n'} dv$, $\int y\psi_n\tilde{\psi}_{n'} dv$ and $\int z\psi_n\tilde{\psi}_{n'} dv^{(1)}$. Here n , corresponds to the spectroscopic j in behaviour, though the conception of the electron spin is not yet taken in and so the numerical values are different. If we interpret the above integral as the electric moment of the field due to the radiation imparted by the atom system to the surrounding ether during the transition $n \rightarrow n'$ of the configuration in the atom, the wave mechanical interpretation of the selection rules and the polarization principle is quite analogous to that of Sommerfeld's old treatment. Since the electric moment corresponding to the transition $\Delta n=0$ has only the Z-component (in the direction of the field) and therefore is linearly polarized, we must naturally anticipate, in this case, no angular momentum of the electro-magnetic impulse.

Thus, if we believe the principle of the conservation of angular momentum we have naturally to believe also in the existence of the radiation (photon) possessing no spin angular momentum as well as those carrying $+\text{or}-\frac{h}{2\pi}$. The dual consequence is to accept the existence of the electron and proton possessing no spin, besides those having $+\text{or}-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$.

Without going further into this topic we may discuss some important allied phenomena which may serve in settling the conception.

IV. Franck-Hertz's Experiment.

Consider the case of the excitation of the atom by making an electron collide with its suitable kinetic energy. If the electron is possessed of the spin angular momentum $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ in itself and the principle of the conservation of the angular momentum holds during this scattering process, the change of the content of the angular momentum of the colliding atom would be 0 or 1 but never 2.

But the experimental results⁽²⁾ with mercury vapour show that not only the excitation $1^1S_0 \rightarrow 2^1P_1$ ($\Delta j=1$), but also the excitation $1^1S_0 \rightarrow 2^1P_2$

(1) E. SCHRÖDINGER, Abhandlungen p. 85, 2nd Edition, 1928.

(2) J. FRANCK and P. JORDAN, Anregung von Quanten Sprüngen durch Stöße, p. 72, 1926.

($\Delta j=2$) and $1^1S_0 \rightarrow 2^1P_0$ (0-0) are favourable by this method.

This is quite difficult to explain by the angular momentum conceptions.

It seems much preferable to state such things in quantum mechanical terms than to use such model-like expressions as "angular momentum", which should literally obey the principle of their conservation.

V. Wood and Loomis' Experiment.⁽¹⁾

It is, here, very interesting to know how the rotation quantum number of a molecule changes when it collides with the non-spin particle, He-atom. If the principle of the conservation of angular momentum strictly holds during the collision (scattering) process, in a similar way as stated by Raman in the case of the photon-molecule interaction, the rotation of the molecule would suffer no change. Wood and Loomis' experiment, however, tells us that, "during collisions in which the electronic quantum number is unchanged, the rotational quantum number of an iodine molecule can only change by even number."

The explanation of this phenomenon may be done nicely from the stand point of wave mechanics. Since the molecule (colliding with the non-spin particle) always retains the symmetric or antisymmetric property of the total wave function with respect to the two nuclei, according as to whether it satisfies the Bose or Fermi-Statistics respectively, the symmetric or antisymmetric (in the positional coordinates of the two nuclei) molecule⁽²⁾ would retain its nature of symmetry during the process in which no quantum change of the electronic configuration function and of the protonic spin function would take place, so the rotational quantum number changes by such process by even number. If the coupling of the rotational motion with other configurations is relatively loose, the change of the nature of symmetry in the rotational motion would affect very little the rest in changing the nature of the symmetry and then it has to control itself, restricted by its own statistics, so as not to destroy its

(1) R. W. WOOD and F. W. LOOMIS, *Phil. Mag.*, 6, 231, 1923.

(2) F. HUND, *Z. f. Phys.*, 42, 93, 1927.

own nature of symmetry. It gives rise to the selection rules $\Delta K=0, \pm 2$, in such a process.

VI. Raman Spectra.

Let us consider that the phenomena of the Raman Spectra, quite regardless of the spin of the photon, take place by the laws which hold in the molecular configuration itself. The controlling statistics is considered to be strictly satisfied by every state of the molecule.

In the scattering process, in which the electronic configuration in the molecule is not quantumly changed, the nature of symmetry with respect to the nuclei is determined by both the rotational function and the spin function of two nuclei. If the spin function be relatively more firmly coupled with the other electronic configuration (at least during the scattering process), than with the rotational one, it would not alter its parallel or antiparallel property during the interaction in which only the rotational motion is quantumly changed. The allowable changes in the rotational motion, satisfying the principle of symmetry or antisymmetry of the total wave function with respect to the two nuclei, are those ones in which $\Delta K=0, \pm 2$.⁽¹⁾

VII. Bonhoeffer's Experiment⁽²⁾.

Up to this point, we have discussed the scattering (or collision) process of the atom or the molecule when it is attacked by (1) the photon $\left(\pm \frac{h}{2\pi}\right)$, the electron $\left(\pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}\right)$, or the He atom (0). Here we are considering the collision process taking place among H_2 molecules, $\left(\pm 2n \frac{h}{2\pi}\right)$.

The hydrogen molecules in a closed vessel, all of which have initially a 0 rotational state, possess, after heating only the rotational motion of the even quantum number, as long as they are free from some catalytic processes⁽²⁾.

- (1) A tentative explanation formerly proposed by Wood and others assuming a virtual intermediate one between the initial and final rotational states bears some resemblance to this conception.
- (2) K. F. BONHOEFFER u. P. HARTECK, Sitz. Ber. Preuss. Akad. d. Wiss., p. 103, 1929.

Thus we see that in the collision process, quite independent of the number of the angular momentum of the colliding particle (except the electron), the rotational motion of the molecule always obeys the selection rules $\Delta K=0, \pm 2$. The molecule shows, thus, a disposition to retain its own nature of symmetry with respect to the coordinates of two nuclei in consequence of satisfying the principle of the conservation of the symmetry or antisymmetry of its total wave function with respect to the nuclei, i. e., being controlled by the statistics which holds in that molecule.

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (I)

Sôji MATSUMURA (Adoptivname, früher Soji NAKAJIMA)

(Accepted for publication May 18th, 1932)

Im folgenden möchte ich Untersuchungen über
Flächen und Kurven mitteilen

(1) Über periodisch topologische Abbildungen

Bekannt ist das folgende zuerst von BIRKHOFF bewiesene sog. letzte Theorem von POINCARÉ:

Jede flächentreue topologische Abbildung t eines Kreisrings R auf sich selbst, welche die beiden Randkreise mit entgegengesetztem Drehsinn einzeln auf sich selbst abbildet, lässt mindestens einen Punkt fest.

Wir wollen hier auch eine topologische Abbildung t von R betrachten, aber die Voraussetzung der Flächentreue durch die der Periodizität ersetzen.

Wir behaupten, dass dann eine solche Abbildung nicht existieren kann, wenn für die Abbildung nicht existieren kann, wenn für die Abbildung der Randkreise die frühere Voraussetzung beibehalten wird.

Beweis: Die beiden konzentrischen Randkreise des Rings R seinen K (*aussen*) und k (*innen*).

Es sei ferner k_1 ein beliebiger zwischen K und k verlaufender und mit ihnen konzentrischer Kreis.

Die Abbildung t besitze die Periode n , d.h. es sei

$$t^n = 1$$

Dann seien k_2, k_3, \dots, k_n die successiven Bilder von k_1 bei t, t^2, \dots, t^{n-1} , sodass also

$$t^n(k_1) = t(k_n) = k_1$$

ist.

Alle diese Bildkurven k_i enthalten k im Innern, da nach Voraussetzung k in sich selbst übergehen soll.

Wir bezeichnen mit (k_i) den von k_i begrenzten abgeschlossenen Bereich.

Es sei (γ) der den n Bereichen (k_i) gemeinsame Bereich, ihr sog. Durchschnitt, γ sei seine Randkurve.

Dann ist γ eine einfache geschlossene Kurve (JORDAN-Kurve), welche auch k im Innern enthält und welche wegen der Periodizität von t durch t in sich selbst übergeführt wird.

Sie enthält Punkte von k_1 wie von jeder der Bildkurven k_i , da sie wegen der Periodizität von t weder ganz im Innern noch ganz im Äusseren einer Kurve k_i verlaufen kann.

Betrachtet man neben k_1 einen anderen konzentrischen Kreis k_1' zwischen k und K , der k_1 im Innern enthält, so entspricht ihm analog eine einfache geschlossene Kurve γ' , welche γ im Innern enthält.

So entspricht der Schar aller zwischen K und k gelegener zu ihnen konzentrischer Kreise eine Schar von einfachen geschlossenen Kurven, welche bei t in sich selbst übergehen, dieselbe gegenseitige „Anordnung“ besitzen wie die Kreise und den Kreisring R schlicht überdecken.

Die Kreise K und k kann man zu dieser Kurvenschar hinzurechnen.

Hat man eine dieser Kurven γ einen bei der Abbildung t festbleibenden Punkt F , so lässt sich daraus folgern, dass t die Identität ist. Denn angenommen, der Punkt P von γ bleibe bei t nicht fest, so betrachten wir denjenigen Teilbogen $\bar{\gamma} = FP$ von γ , der bei t vergrössert wird.

Dann enthält also das Bild $t(\bar{\gamma})$ den Bogen $\bar{\gamma}$ als echten Teil, $t^2(\bar{\gamma})$ enthält wieder $t(\bar{\gamma})$, u. s. w.

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass $t^n(\bar{\gamma}) \equiv \bar{\gamma}$ sein soll.

Es besteht also jedenfalls γ ganz aus Fixpunkten gegenüber t .

Nun betrachte man eine beliebige, ganz im Ring R verlaufende einfach geschlossene Kurve l , welche mit γ zwei Punkte gemein hat.

Wie oben erhält man dann aus l und seinen Bildern $l_2=t(l)$, $l_3=t^2(l)$,, $l_n=t^n(l)$ eine bei t invariante einfache geschlossene Kurve λ , welche mit γ auch zwei Punkte gemeinsam hat, die nach dem Obigen bei t fest bleiben.

Dann aber muss analog wie bei γ auch jeder Punkt von λ bei t festbleiben.

Durch successives Überdecken des Innengebiets des Rings R mit solchen Kurven l (bzw. λ) kann man nun erreichen, dass man von jedem Innenpunkt von R einsieht, dass er bei t nicht bewegt wird.

t müsste also die Identität sein.

Dies aber widerspricht unserer Voraussetzung, über die Abbildung der beiden Randkreise R und k .

Um unsere Behauptung also völlig zu beweisen, brauchen wir nur noch einzusehen, dass t mindestens einen Fixpunkt besitzen müsste.

Besäße t nämlich keinen Fixpunkt, so liesse sich analog wie bei v. KERÉKJÁRTÓ (Vorlesungen über Topologie, S. 224). K mit k durch einen einfachen Bogen $b=b_1$ verbinden, der mit seinen Bildern $b_2=t(b_1)$,, $t^n(b_1)=b_n=t(b_{n-1})$ keinen Punkt gemein hätte, was aber der Voraussetzung über den entgegengesetzten Drehsinn der Abbildung von K und k widerspräche.

Es gilt also keine periodisch-topologische Abbildung des Kreisrings, welche die beiden Randkreise in entgegengesetztem Sinne dreht.

(2) Zur Differentirigeometrie der mehrdimensionalen Ellipsoide

Vor einigen Jahren hat W. Süss für die Ellipsoide des dreidimensionalen Raumes mehrere charakteristische Sätze bewiesen (Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, 2 (1926) No. 3).

Ich möchte hier einige jener Resultate auf mehrdimensionale Ellipsoide verallgemeinern.

Dabei benutze ich die Formeln der affinen Differentialgeometrie nach Band II der BLASCHKE'schen Vorlesungen, insbesondere § 65, ohne Zitat.

Die Arbeit von Süss setze ich als bekannt voraus.

Satz 1: Die Ellipsoide sind die einzigen Eihyperflächen des R_{n+1} , für welche die Mittelpunkte der beiden *Lie*- F_2 von Gegenpunkten zusammenfallen.

Beweis: Wenn H die mittlere Affinkrümmung ist, so ist der Mittelpunkt \mathfrak{z} der *Lie*- F_2 von \mathfrak{x} bestimmt durch

$$(1) \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \frac{1}{H} \cdot \mathfrak{y}.$$

Sind \mathfrak{x} und $\bar{\mathfrak{x}}$ zwei Gegenpunkte, so ist also nach Voraussetzung:

$$(2) \quad \mathfrak{z} - \bar{\mathfrak{z}} = 0 = \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} + \frac{1}{H} \mathfrak{y} - \frac{1}{H} \bar{\mathfrak{y}}$$

Es ist also

$$\mathfrak{x}_i - \bar{\mathfrak{x}}_i = \left(\frac{1}{H} \right)_i \bar{\mathfrak{y}} - \left(\frac{1}{H} \right)_i \mathfrak{y} + \frac{1}{H} B'_i \bar{\mathfrak{x}}_i - \frac{1}{H} B'_i \mathfrak{x}_i.$$

Wegen

$$(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_2, \bar{\mathfrak{x}}_i) = 0$$

ist also

$$(3) \quad \left(\frac{1}{H} \right)_i \bar{\mathfrak{y}} = \left(\frac{1}{H} \right)_i \mathfrak{y}.$$

Hieraus folgt

$$(3a) \quad H = \text{const.} \quad \text{oder} \quad (3b) \quad \bar{\mathfrak{y}} = \lambda \mathfrak{y}.$$

Wie ich nun im 2. Band des Japanese Journal of Math. (S. 195) gezeigt habe, sind die Ellipsoide die einzigen Eihyperflächen mit konstantem H , sodass im Falle von (3a) der Beweis fertig ist.

Im Falle von (3b) aber folgt wegen $\xi + \bar{\xi} = 0$, $\lambda = \text{const.}$, wegen der Geschlossenheit von \mathfrak{x} also $\bar{\mathfrak{y}} = \lambda \mathfrak{y} = \lambda \bar{\lambda} \bar{\mathfrak{y}}$,

$$(4) \quad \lambda = -1.$$

Dann aber ist nach (4) und wegen der Bedeutung von λ

$$(5) \quad \frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \text{const.} = \alpha,$$

also nach (2)

$$(6) \quad \bar{x} - x = ay,$$

$$(7) \quad (\bar{x} - x)x = a = \text{const.},$$

d. h. die Eihyperfläche besitzt konstante Affinbreite. Dann aber folgt unser Satz aus einem Ergebnis von Süss, der (in Tôhoku Math. Journal 30) gezeigt hat, dass die mehrdimensionalen Ellipsoide die einzigen Eihyperflächen konstanter Affinbreite sind.

Satz 2: Die einzigen wechselseitig affinparallelen Eihyperflächen des R_{n+1} sind die Ellipsoide.

Beweis: Nach Definition ist

$$(1) \quad \bar{\xi} = \bar{x}, \quad \bar{x} - x = py = \bar{p}\bar{y}.$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\bar{x}_i - x_i = p_i y + p B'_i x_i = \bar{p}_i \bar{y} + \bar{p} \bar{B}'_i \bar{y}_i.$$

Nach (1) ist also $p_i = \bar{p}_i = 0$,

$$(2) \quad p = \text{const.}, \quad \bar{p} = \text{const.}$$

Nach (1) und (2) ist nun

$$(3) \quad \begin{cases} (\bar{x} - x)x = p = \text{const.} = k^{-\frac{1}{n+2}}(\bar{x} - x)\bar{\xi}, \\ (x - \bar{x})\bar{x} = -\bar{p} = \text{const.} = \bar{k}^{-\frac{1}{n+1}}(x - \bar{x})\bar{\xi}, \end{cases}$$

Wenn k die gewöhnliche Krümmung ist.

Aus (1) und (3) ergibt sich

$$kp^{n+2} = \bar{k}(\bar{p})^{n+2},$$

Nach (2) also

$$(4) \quad k = \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{n+2} \bar{k} = c\bar{k}.$$

Nach Süss (Tôhoku Math. Journ. 30) folgt aber aus der Proportionalität (4) der gewöhnlichen Krümmungen, dass die Hyperflächen x und \bar{x} homothetisch sind, also

$$(5) \quad \bar{x} = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{1+\frac{2}{n}} \bar{x} + \alpha = \gamma \bar{x} + \alpha \quad (\gamma = \text{const.})$$

ist.

Nach (1) und (5) ist jetzt

$$(\gamma - 1) \bar{x} + \alpha = p \bar{y} = \bar{p} \bar{y},$$

also

$$(\gamma - 1) \bar{x}_i = p B'_i \bar{x}_i,$$

daraus folgt

$$(6) \quad B_i^k = \begin{cases} \frac{\gamma - 1}{p} = \text{const.} & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Nun ist die mittlere Affinkrümmung

$$(7) \quad H = -\frac{1}{n} B_k^k = \frac{1 - \gamma}{p} = \text{const.},$$

also nach meinem früheren, schon beim Beweis von Satz 1 benutzten Ergebnis, \bar{x} ein Ellipsoid sein muss.

Ebenso erkennt man, dass auch \bar{y} ein Ellipsoid sein muss, w.z.b.w.

Sieht man von der Geschlossenheit der Flächen ab, so existieren schon im R_n nach Süss (Math. Ann. 98) andere Paare wechselseitiger Affinparallellflächen ausser Ellipsoiden, ein Art affiner WEINGARTENflächen.

Etwas entsprechendes dürfte sich bei allgemeinen wechselseitig affinparallelen Hyperflächen ergeben.

(3) Über wechselseitig affinparallele Flächen, die gleichzeitig Affinrotationsflächen mit derselben Achse sind

1. W. Süss hat⁽¹⁾ eine durch besondere affingeometrische Eigenschaften definierte Flächenklasse untersucht, die er Affinrotationsflächen nennt, weil sie die analogen Eigenschaften besitzen, wie die Rotationsflächen der gewöhnlichen Geometrie.

(1) Math. Annalen 98, (1927-28) S. 648-696.

Ihre Affinnormalen treffen alle eine bestimmte Gerade a , die wir die „Achse“ nennen.

Ihre „Meridiane“, d. h. die Schnittkurven mit den durch die Achse a gehenden Ebenen, sind Schattengrenzen.

Ihre „Breitenkurven“, d. h. die Kurven, längs denen die Affinnormalen der Fläche alle durch denselben Punkt der Achse a gehen, sind sämtlich einander ähnliche und bezüglich der Achse zueinander ähnlich gelegene Kegelschnitte, längs welchen die affinen Hauptkrümmungsradien konstante Werte haben.

Meridiane und Breitenkurven sind Affinkrümmungslinien,

Man kann sich nun die Aufgabe vorlegen, sämtliche Affinrotationsflächen χ zu untersuchen, deren affinparallele Flächen wieder Affinrotationsflächen mit derselben Achse sind.

Dabei heisst jede Fläche

$$(1) \quad \chi^* = \chi + p\eta \quad (p = \text{const.})$$

nach Süß⁽²⁾ affinparallel zu χ . Affinparallelismus ist im allgemeine kein wechselseitiges Verhältnis.

Ich behaupte nun:

2. Jede zur Affinrotationsfläche χ wechselweise affinparallele Fläche χ^* , für die also ausser (1) auch

$$(1^*) \quad \chi = \chi^* + p^*\eta^* \quad (p^* = \text{const.})$$

gilt, ist wieder eine Affinrotationsfläche mit derselben Achse.

Beweis: Indem wir die Beziehungen der zitierten Arbeiten übernehmen, erhalten wir für die Affinrotationsfläche χ die Gleichung

$$(2) \quad \chi + R_2\eta = \beta a \quad (a = \text{const.}, \beta_2 = 0)$$

Nach (1) und (1*) entsprechen sich die Affinkrümmungslinien von χ und χ^* .

Wir wollen den affinen Hauptkrümmungsradius R_2^* berechnen, wozu wir uns des affingeometrischen Gegenstücks der Formeln von O. RODRIGUES bedienen:

(2) Math. Annalen, 98, (1927-28) S. 313-320.

$$(3) \quad \xi_i^* + R_i^* \eta_i^* = 0.$$

Nach (1), (1*) und (2) findet man

$$\xi_i^* = \xi_i - p^* \xi_i^* = R_i \eta_i^* \frac{p^*}{p} - p^* \eta_i^*,$$

also wegen (3)

$$(4) \quad R_i^* = p^* - \frac{p^*}{p} R_i.$$

Hiernach ist speziell der zur linken Seite von (2) analoge Ausdruck

$$\begin{aligned} \xi^* + R_2^* \eta^* &= (\xi + p\eta) + \left(p^* - \frac{p^*}{p} R_2 \right) \left(-\frac{p}{p^*} \eta \right) \\ &= \xi + R_2 \eta = \beta a, \end{aligned} \quad \text{w.z.b.w.}$$

Man kann auch so schliessen: Die Affinnormalen von ξ^* und ξ fallen, wie aus (1) und (1*) leicht folgt, in entsprechenden Punkten miteinander zusammen, also sind die beiden Flächen gleichzeitig Affinrotationsflächen mit derselben Achse.

3. Wir betrachten jetzt die umgekehrte Aufgabe: Die Flächen ξ und ξ^* seien gleichzeitig Affinrotationsflächen mit derselben Achse.

Es gelte also (2) und

$$(2^*) \quad \xi^* + R_2^* \eta^* = \beta^* a.$$

Es sei ausserdem ξ^* zu ξ affinparallel, d. h. es bestehe noch die Gleichung (1).

Frage: Wann gilt dann auch (1*) für wechselweisen Affinparallelismus.

Wir behaupten, die Affinrotationsflächen ξ und ξ^* zur selben Achse sind dann und nur dann wechselweise affinparallel, wenn $\beta = \beta^*$.

Wir zeigen zunächst, dass diese Bedingung *hinreichend* ist.

Wir setzen dann entsprechend (4)

$$p^* = \frac{p R_2^*}{p - R_2}$$

und berechnen aus (1), (2) und (2*)

$$\xi^* + p^* \eta = \xi + p \eta + \frac{p R_2^*}{p - R_2} \left[\frac{\beta a}{R_2^*} - \frac{\xi}{R_2^*} - \frac{p \eta}{R_2^*} \right]$$

$$= \xi + \frac{p}{p - R_2} [\beta a - \xi - R_2 \eta]$$

$$= \xi,$$

w. z. b. w

Die Bedingung ist aber auch *notwendig*.

Denn wir hatten ja gerade in Nr. 2 aus (1) (1*) und (2) schon (2*) mit der Nebenbedingung $\beta = \beta^*$ abgeleitet.

(4) Eine charakteristische Eigenschaft der Affinrotationsflächen

Die von W. Süss eingeführten Affinrotationsflächen⁽¹⁾ sind dadurch definiert, dass ihre Affinnormalen eine feste Achse a schneiden und ihre Meridiane, d. h. die Schnittkurven mit den Ebenen durch a Schattengrenzen sind.

Letztere bilden zugleich die eine Schar von Affinkrümmungslinien.

Die andere Schar besteht aus den Breitenkurven, längs welchen die Affinnormalen durch einen festen Punkt der Achse a gehen.

Die Breitenkurven sind in parallelen Ebenen gelegene, einander ähnliche und zu a ähnlich gelegene Kegelschnitte, längs welchen die Affinkrümmungsradien konstant sind; sie bilden zugleich die eine Schar von DARBOUX'schen Kurven.

B. SU⁽²⁾ hat bemerkt, dass die Affinrotationsflächen bei Anschluss von Affinsphären auch dadurch charakterisiert werden können, dass auf ihnen ein System DARBOUX'scher Kurven in parallelen Ebenen verläuft, oder auch dadurch, dass ein System von DARBOUX'schen Kurven eben ist und zugleich aus Affinkrümmungslinien besteht, während die Affinnormalen in die Schmiegebenen der konjugierten Kurven fallen.

Bei beiden Kennzeichnungen wird von der m. E. sehr einschneidenden Voraussetzung ausgegangen, dass die DARBOUX'schen Kurven *eben* sind.

Im folgenden will ich versuchen, diese Voraussetzung durch eine andere zu ersetzen, welche weniger auszusagen scheint. Ich beweise den **Satz**:

(1) Mathemat. Annalen, Bd. 98 (1927-28) S. 848.

(2) Japanese Journ. of Math., Vol. 5, (1928) p. 211, Satz 22 und 32. Su hat auch noch andere Methoden angegeben, die betrachtete Flächenklasse zu charakterisieren.

Die Affinrotationsflächen sind bei Anschluss von Affinsphären dadurch charakterisiert, dass auf ihnen eine Schar von Affinkrümmungslinien zugleich DARBOUX'sche Kurven sind und dass längs diesen Kurven beide Affinkrümmungsradien konstante Werte haben.

Beweis: Wie wählen die Affinkrümmungslinien zu Parameterkurven.

Dann ist (W. BLASCHKE: Differentialgeometrie II)

$$(1) \quad G_{12} = B_{12} = 0.$$

Die Kurven $u' = \text{const.}$, mögen nun zugleich DARBOUX'sche Kurven sein.

Dann ist

$$(2) \quad A_{222} = A_{22}^2 = A_{22}^1 = A_{112} = A_{11}^2 = 0,$$

z. T. wegen der Apolaritätsrelationen $A_{ik}^k = 0$.

Nach Voraussetzung soll

$$(3) \quad -\frac{\partial R_1}{\partial u^2} = \frac{\partial R_2}{\partial u^2} = 0$$

sein.

Dann ist nach den Formeln von O. RODRIGUES

$$(4) \quad \mathfrak{g}(u') = \xi + R_1 \eta$$

von u^2 unabhängig.

Daraus folgt

$$(5) \quad \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) \xi_1 + (R_2)_1 \eta = \mathfrak{g}'(u')$$

$$(6) \quad \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\partial \xi}{\partial u^1 \partial u^2} = (R_2)_1 \frac{\xi_2}{R_2},$$

woraus man durch Vergleich mit den Ableitungsgleichungen

$$\xi_{ik} = A_{ik}^1 \xi_i + G_{ik} \eta,$$

nach (1) und (2) erhält man:

$$(7) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial G_{11}}{\partial u^2} = 0$$

Dabei nehmen wir an, dass $R_1 \neq R_2$ sein. Durch passende Wahl von u^1 können wir dann

$$(8) \quad G_{11} = \text{const.}, \quad \Gamma_{11}^1 = 0$$

machen, was wir als geschehen annehmen.

Nach (2) und (8) ist aber nun

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \xi}{(\partial u^1)^2} = A_{11}^1 \xi_1 + G_{11} \eta,$$

$$\frac{\partial^3 \xi}{(\partial u^1)^3} = (*) \xi_1 + (**) \eta,$$

d.h. die Kurven $u^2 = \text{const.}$ sind *ebene* Kurven.

Nach (5) liegt der Vektor $\xi'(u^1)$ in allen diesen Ebenen, d. h. $\xi(u^1)$ muss eine Gerade α durchlaufen.

Diese Gerade α wird nach (4) von allen Affinnormalen der Fläche geschnitten.

Nach (5) und (6) sind ferner die ebenen Kurven $u^2 = \text{const.}$ Affinkrümmungslinien und Schattengrenzen.

Hiermit ist aber der Anschluss an die Definition der Affinrotationsflächen von Süß erreicht, w.z.b.w.

Man kann aber auch unabhängig von jener Definition einfach die Haupteigenschaften unserer Flächen ableiten. Zum Beispiel liefern (6) und (9) bei verschiedener Bildung von $\frac{\partial \xi}{(\partial u^1)^2 \partial u^2}$

$$(10) \quad \frac{\partial A_{11}^1}{\partial u^2} = 0, \quad A_{11}^1 = A_{12}^2 = f(u^1).$$

Nun ist nach (6) wegen

$$\frac{\partial \xi}{\partial u^1 \partial u^2} = (A_{12}^1 + \Gamma_{12}^1) \xi_1$$

$A_{12}^2 + \Gamma_{12}^2$ eine Funktion von R_1 und R_2 , also wegen (3) von u^2 unabhängig, nach (10) also auch

$$\frac{\partial}{\partial u^2} (\Gamma_{12}^2) = 0,$$

woraus folgt:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \log G_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} = 0.$$

Da aber eine einfache Rechnung [l.c.⁽¹⁾ Gleichung (15)]

$$\left(\xi^2, \frac{\partial^2 \xi}{(\partial u^2)^2}, \frac{\partial \xi}{(\partial u^2)^2} \right) = \frac{G_{11}(G_{22})^2}{2} \frac{\partial^2 \log G_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} \times (\xi^1, \xi^2, \eta)$$

ergibt, so verlaufen die Kurven $u^1 = \text{const.}$ nach (11) gleichfalls in Ebenen, welche nach (6) zueinander parallel sind.

(5) Über den analytischen Charakter von Affin-Minimalflächen und Relativ-Minimalflächen

Bekanntlich sind gewöhnliche Minimalflächen analytisch.

Dies geht z. B. aus der bekannten WEIERSTRASS'schen Darstellung hervor.

Eine ähnliche Darstellung gibt es nun noch nicht für Affin-Minimalflächen, sodass zur Untersuchung des analytischen Charakters dieser Flächen andere Hilfsmittel herangezogen werden müssen.

Ich will nun hier zeigen:

Satz 1: Affin-Minimalflächen mit positiv-definiten quadratischer Grundform sind analytisch.

Beweis: Indem ich mich in den Beziehungen den bekanntesten Vorlesungen über Differentialgeometrie II von BLASCHKE anschliesse, setze ich für Affinminimalflächen

$$(1) \quad \Delta \xi = G^{ik} \xi_{ik} = 0$$

an.

Da diese Gleichung eine Lösung besitzt, existieren sog. affinisotherme Parameter, für die

$$(2) \quad G_{12} = 0, \quad G_{11} = G_{22}$$

wird, sodass (1) die Gestalt erhält:

$$(3) \quad \Delta \mathfrak{X} = \mathfrak{X}x_{uu} + \mathfrak{X}x_{vv} = 0.$$

Nach (3) aber sind die Komponenten $\mathfrak{X}_{(k)}$ von \mathfrak{X} analytische Funktionen, denn sie lassen sich so darstellen :

$$(4) \quad \mathfrak{X}_{(k)} = R [\psi_k(u + iv)] \quad (k=1, 2, 3).$$

Der kontravariante Vektor ist also für unsre Affin-Minimalflächen stets analytisch.

Dass aber dann auch \mathfrak{z} analytisch ist, kann man entweder den speziellen Formeln von LELIEUVRE [l.c. S. 140 (49)] entnehmen.

Oder man schliesst [vergl. l.c. S. 162 (a 8), (a 11) S. 163 (a 28)] dasselbe aus den allgemeinen Formeln von LELIEUVRE.

Natürlich lässt sich eine analoge Schlussweise auch für gewöhnliche Minimalflächen durchführen.

Es taucht dabei die Frage auf, ob auch Relative-Minimalflächen im Sinne von EMIL MÜLLER bei analytischer Eichfläche analytisch sind.

Nach dem hier gegebenen Beweis wird diese Frage zu bejahen sein, falls es ein passendes Analogon der Formeln von LELIEUVRE in der relativen Flächentheorie gibt.

Nun lässt sich aber tatsächlich mit Hilfe der von mir a. a. O. auf gestellten Grundformeln der Relativ-Geometrie¹⁾ offenbar die Ableitung der genannten Formeln [l. c. S. 163 (a 28)] übertragen ; es gibt also

Satz 2 : *Jede Relativ-Minimalfläche mit positiv-definiter quadratischer Grundform und analytischer Eichfläche ist selbst analytisch.*

Hierin ist der Satz für gewöhnliche Minimalflächen als Spezialfall enthalten.

(6) Der Satz von Brunn und Minkowski für n-dimensionale Parallelotope

Wir beweisen hier den folgenden Spezialfall des bekannten Satzes von BRUNN und MINKOWSKI aus der Theorie der konvexen Körper mit

(1) NAKAJIMA, S: Die Grundformeln der relativen Flächentheorie ; Japanese Journal of Math. Vol. VII (1930) p. 43.

elementaren Mitteln :

Es seien P_n und R 2 rechtwinklige n -dimensionale Parallelotope (Analogon an Parallelogramm und Parallelepipet) von gleichem Rauminhalt und paarweise parallelen Kanten a_r bzw. b_r .

Dann behaupten wir :

Das Volumen von $(1-t)P + tR$ ist :

$$(B) \quad v[(1-t)P + tR] \geq 1, \quad (0 < t < 1)$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur für

$$a_i = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Beweis: Zunächst ist nach Voraussetzung wegen der Raumgleichheit

$$(1) \quad \prod_r a_r = \prod_r b_r = 1.$$

Wir fragen nun, wie sich bei festen Werten von b_r und t die Zahlen a_r so bestimmen lassen, dass $v[(1-t)P + tR]$ möglichst klein wird. Es ist

$$(2) \quad v[(1-t)P + tR] = \prod_r [(1-t)a_r + tb_r],$$

Zunächst existiert das Minimum sicher in einem beschränkten Intervall für a_r .

Denn, ist $a_M = \text{Max } a_r$ und $b_m = \text{Min } b_r$, so ist

$$(1-t)a_M + tb_M \geq (1-t)a_M,$$

$$(1-t)a_r + tb_r \geq tb_r \geq tb_m,$$

also nach (2)

$$(3) \quad v[(1-t)P + tR] \geq (1-t)a_M [tb_m]^{n-1}.$$

Hieraus erkennt man, dass die linke Seite von (2) und (3) mit a_M über alle Grenzen wächst, also ihr Minimum in einem beschränkten Intervalle von a_M liegt.

Man findet nun das Minimum durch Differenzieren z.B. nach a_i mit der Nebenbedingung (1).

Wir setzen dabei nach (2):

$$(4) \quad a_1 = x, \quad a_2 a_1 \dots a_n = \frac{1}{x}, \quad \text{also} \quad a_2 = \frac{a}{x}.$$

Dann wird nach (2):

$$\begin{aligned} \log v[(1-t)P + tR] &= \log [(1-t)x + tb_1] \\ &+ \log [(1-t)\frac{a}{x} + tb_2] + \log F, \end{aligned}$$

wobei F unabhängig von $x=a_1$ ist.

Daraus erhält man für das Minimum:

$$\frac{d \log v[(1-t)P + tR]}{dx} = \frac{1-t}{(1-t)x + tb_1} - \frac{(1-t)a}{x^2 \left[\frac{(1-t)a}{x} + tb_2 \right]} = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad b_1 x' = b_1 a, \quad x = a_1 = \sqrt{\frac{b_1 a}{b_2}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{b_2 a}{b_1}},$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Auf analoge Weise aber erhält man für je zwei Indizes μ, ν

$$(5) \quad \frac{a_\mu}{a_\nu} = \frac{b_\mu}{b_\nu},$$

wonach wegen (1) für das Minimum

$$(6) \quad a_r = b_r$$

folgt.

Hiermit ist aber unsere Behauptung (B) schon bewiesen.

Analog zu (B) folgt für $t = \frac{\beta}{a+\beta}$, $(1-t) = \frac{a}{a+\beta}$:

$$(B') \quad H(aa_r + \beta b_r) \geq (a+\beta)^n$$

Wenn wir die Beschränkung (1) beiseite lassen, also irgend zwei rechtwinklige Parallelotope P', R' mit paarweise parallelen Kanten a'_r, b'_r betrachten, so gilt dann nach (B) für die ihnen homothetischen

$$P = \frac{P'}{\sqrt[n]{v(P')}}, \quad R = \frac{R'}{\sqrt[n]{v(R')}}.$$

vom Rauminhalt 1 wegen $v(P') = \Pi a'_r$, $v(R') = \Pi b'_r$:

$$\sqrt[n]{\Pi \left[(1-t) \sqrt[n]{\frac{a'_r}{v(P')}} + t \sqrt[n]{\frac{b'_r}{v(R')}} \right]} \geq 1 = (1-t) \sqrt[n]{\Pi \frac{a'_r}{v(P')}} + t \sqrt[n]{\Pi \frac{b'_r}{v(R')}},$$

also nach (B'), wenn wie

$$\alpha = \frac{1-t}{\sqrt[n]{v(P')}}, \quad \beta = \frac{t}{\sqrt[n]{v(R')}} \quad \text{setzen:}$$

$$(7) \quad \sqrt[n]{\Pi [\alpha \alpha'_r + \beta \beta'_r]} \geq \alpha \sqrt[n]{\Pi \alpha'_r} + \beta \sqrt[n]{\Pi \beta'_r}.$$

Hierin sind alle Zahlen nicht-negativ.

Das Gleichheitszeichen gilt hierin nach (5) nur, wenn

$$a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n,$$

d. h. wenn die Parallelotope P' , R' einander homothetisch sind.

Natürlich besteht die Frage, ob sich der BRUNN-MINKOWSKI'sche Satz nicht auch für andere Polyeder und Polytope besonders einfach beweisen lassen wird.

Indessen dürften die betrachteten Parallelotope schon wegen der einfachen Inhaltsdarstellung für die Berechnung den Vorzug besitzen.

(7) Eine Kennzeichnung homothetischer Eiflächen

Satz: Die Eigenschaft zweier Eiflächen, homothetisch (ähnlich und zu einander ähnlich gelegen) zu sein, wird dadurch gekennzeichnet, dass ihre senkrechten Projektionen in allen möglichen Richtungen paarweise homothetisch sind.

Beweis: Ist ω der Einheitsvektor in der jeweiligen Projektionsrichtung, sind ferner

$$\xi(u^1, u^2), \quad \epsilon(u^1, u^2)$$

die beider Eiflächen und $\bar{\xi}$, $\bar{\epsilon}$ ihre Projektionen, so gilt

$$(1) \quad \bar{\xi} = \xi - (\xi \omega) \omega, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon - (\epsilon \omega) \omega, \quad \omega^2 = 1.$$

Dass die Projektionen homothetischer Eiflächen homothetisch sind, ist evident.

Es seien die Projektionen jetzt umgekehrt homothetisch :

$$(2) \quad \bar{x} = \lambda \bar{e}, \quad \lambda = \lambda(\omega).$$

Die Kurve

$$u^2 = 0$$

sei auf \bar{x} die Eigenschattengrenze bei Beleuchtung in Richtung ω .

Dann ist nach (1) und (2)

$$\bar{x}' = \lambda \bar{e}' = \bar{x}_i - (\bar{x}_i, \omega) \omega = \lambda [e_i - (e_i, \omega) \omega].$$

Nun besteht zwischen den \bar{x}_i und e_i bei Zuordnung der Punkte von \bar{x} und e durch Abbildung nach Parallelen Normalen eine Beziehung

$$(3) \quad e_i = B_i^1 \bar{x}_i,$$

so dass für

$$u^2 = 0$$

folgt :

$$1 - \lambda B_i^1 = 0$$

$$(4) \quad B_i^1 = \frac{1}{\lambda(\omega)} = \text{const.} \quad \text{für } u^2 = 0.$$

Die Grösse λ ist für ein festes ω zwar konstant, aber könnte zunächst als mit ω variabel angesehen werden.

Betrachten wir jedoch die beiden Richtungen ω_1 und ω_2 , für die $\lambda(\omega)$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert annimmt (was stets der Fall ist, da λ eine auf der Kugel stetige Funktion ist), so erkennt man, dass diese Richtungen senkrecht stehen auf denjenigen Richtungen

$$\rho_1, \rho_2$$

maximalen bzw. minimalen Verhältnisses der Breiten der Projektionsfiguren.

λ wird aber dann in jeder zu ρ_1 senkrechten Richtung ω_1 den maximalen und in jeder zu ρ_2 senkrechten Richtung ω_2 den minimalen Wert annehmen.

Diese Richtungen

$$\omega_1, \omega_2$$

fallen aber zweimal zusammen⁽¹⁾; es ist also λ in allen Richtungen ω konstant.

Dann ist aber in irgend einer zweiten Richtung analog zu (4)

$$(4') \quad B_k^2 = \text{const.},$$

also nach Formeln der relativen Flächentheorie von χ bezüglich e als Eichfläche⁽²⁾ die mittlere Relativkrümmung

$$(5) \quad H = \frac{1}{2} B_k^t = \text{const.},$$

also χ als Eifläche eine Relativsphäre⁽³⁾ bezüglich e , d. h. χ zu e homothetisch, w. z. b. w. (Vergl. Tôhoku Math. J. Vol. 35, p. 285.)

(8) Über konvexe geschlossene Kurven und Flächen

Zuerst wollen wir den folgenden Satz beweisen

1. Satz 1: Es seien S_1 und S_2 zwei beliebige parallele Stützebenen, B_1 und B_2 ihre Berührungspunkte mit Eikörper E .

Es sei stets

$$(1) \quad B_1 B_2 = s = \text{const.},$$

dann muss es ein Eikörper von konstanter Breite sein.

Beweis: Es sei

$$b = b(\varphi, \vartheta),$$

Breite in der Richtung (φ, ϑ) in Polarkoordinaten, dann ist

$$(2) \quad s \geq b(\varphi, \vartheta)$$

- (1) Vergl. den Beweis in meiner Arbeit: Eine charakteristische Eigenschaft der Kugel; Jahresbericht der D. Math. Ver. 35, (1926) S. 298.
- (2) Vergl. z. B. meine Arbeit: Die Grundformeln der Relativen Flächentheorie Japanese Journal of Math. Vol. VII, (1930) p. 43.
- (3) Stüss, W.: Zur relativen Differentialgeometrie I; Jap. Journ. of Math. IV (1927). p. 57.

für alle (φ, ϑ) .

Behauptung: $s > b$ ist unmöglich!

Wäre nämlich

$$B_1 B_2 > b(\varphi', \vartheta'),$$

wo (φ', ϑ') die Richtung von $B_1 B_2$ ist, so wären die zugehörigen Ebenen S'_1 und S'_2 keine Stützebenen.

Also

$$S \equiv b(\varphi, \vartheta) = \text{const.},$$

w. z. b. w.

2. Satz 2: Hat für eine Eilinie E der Radiusvektor für einen Pol O in E die Periode a :

$$(1) \quad r(\varphi) = r(\varphi + a),$$

so hat auch die Stützgeradenfunktion $p(u)$ dieselbe Periode a :

$$p(u) = p(u + a),$$

wobei r, φ Polarkoordinaten und u der Winkel der Tangenten gegen die feste Tangente sind.

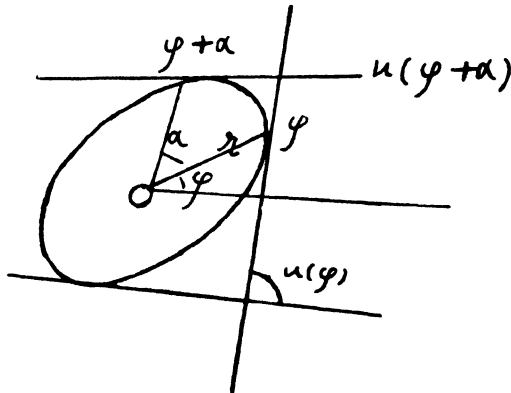
Beweis: Es ist bekanntlich

$$(2) \quad r'(\varphi) = p'(u(\varphi)) + p''_u(u(\varphi))$$

und

$$(3) \quad \sqrt{r'(\varphi)} + r''(\varphi)/r'(\varphi) = p(u(\varphi)).$$

Aus (1) und (3) folgt:



$$(4) \quad p(u(\varphi + \alpha)) = p(u(\varphi)).$$

Hieraus folgt;

$$(5) \quad p'_u(u(\varphi + \alpha)) \cdot u'_\varphi(\varphi + \alpha) = p'_u(u(\varphi)) \cdot u'_\varphi(\varphi)$$

Aus (1) (2) und (4) folgt aber:

$$(6) \quad p'_u(u(\varphi + \alpha)) = p'_u(u(\varphi)).$$

Aus (5) und (6):

$$(7) \quad u'_\varphi(\varphi + \alpha) = \pm u'_\varphi(\varphi).$$

Also ist

$$(8) \quad u(\varphi + \alpha) = \pm u(\varphi) + c,$$

wobei c eine Konstante ist.

(a) Ist

$$\alpha/2\pi = \mu/\nu$$

rational, so ist

$$(9) \quad u(\varphi + \nu\alpha) = u(\varphi + \mu \cdot 2\pi) = u(\varphi) + \mu \cdot 2\pi.$$

Aus (8) folgt nun:

$$(10) \quad u(\varphi + \nu\alpha) = \pm u(\varphi) + \nu \cdot c.$$

Also muss wegen (9) und (10)

$$(11) \quad \nu \cdot c = \mu \cdot 2\pi, \quad c = \mu \cdot 2\pi/\nu = \alpha$$

und

$$u(\varphi + \alpha) = u(\varphi) + \alpha$$

sein.

(b) Ist

$$\alpha/2\pi = \lambda$$

irrational, so gibt es eine ganze Zahl $N(\varepsilon)$ zu jedem vorgegebenen kleinen ε , so dass

$$(12a) \quad N.a = \epsilon_1 + \mu.2\pi,$$

wobei μ eine ganze Zahl (> 0) ist und $|\epsilon_1| < \epsilon$.

Wenn wir ϵ genügend klein wählen, so wird auch in

$$(12b) \quad u(\varphi + N.a) - u(\varphi) = \delta + \mu.2\pi,$$

und wird beliebig klein.

Nach (8) ist

$$(13a) \quad u(\varphi + N.a) = \pm u(\varphi) + N.c$$

Das Minuszeichen kann in (8) nicht stehen ;

Denn $u(\varphi)$ wächst monoton mit φ .

Es sei normiert

$$u(0) = 0.$$

Also ist in (8) $u(a) = c$, und es ist.

$$u(a + \delta_\varphi) > u(a) \text{ für } \delta_\varphi > 0,$$

$$u(a + \delta_\varphi) = \pm u(\delta_\varphi) + c,$$

also nur das positive Zeichen möglich.

Also ist (13a):

$$(13) \quad u(\varphi + N.a) = u(\varphi) + N.c.$$

Nach (12b) und (13a) ist also :

$$\delta + \mu.2\pi = N.c,$$

$$\epsilon_1 + \mu.2\pi = N.a,$$

Wenn δ und ϵ_1 beide sehr klein sind, so ergibt sich

$$(14) \quad N.(c-a) = \delta - \epsilon_1.$$

$N = N(\epsilon)$ wächst, wenn ϵ kleiner wird.

Wäre $c-a \neq 0$ so wächst $N(c-a)$, wenn ϵ kleiner wird, wobei δ und ϵ_1 auch kleiner werden.

Also ist (14) ein Widerspruch : Es muss $c=a$ sein, somit ist

$$(15) \quad u(\varphi + a) = u(\varphi) + a,$$

und betreffs (4) im Falle (a) und (b):

$$p(u+a) = p(u), \quad \text{w. z. b. w.}$$

3. Satz 3: Ist u der Tangentenwinkel einer Eilinie E , und ist Krümmungsradius $\rho(u)$ periodisch:

$$\rho(u) = \rho(u+a),$$

so gibt es einen Punkt O in E , dessen Stützgeradenfunktion $p(u)$ auch die Periode a hat:

$$p(u) = p(u+a)$$

Beweis: Aus unserer Voraussetzung:

$$p(u+a) + p''(u+a) = p(u) + p''(u),$$

d.h.

$$(1) \quad \delta(u) + \delta''(u) = 0,$$

wobei

$$(2) \quad \delta(u) \equiv p(u+a) - p(u).$$

Aus (1) folgt:

$$(3) \quad \delta(u) = a \sin u + b \cos u,$$

wobei a, b zwei Konstanten sind.

Nun nehmen wir eine Konstante u_0 zum u , dann folgt

$$(4) \quad \delta(u_0) = 0, \quad \delta(u_0 + a) = 0, \quad \delta(u_0 + 2a) = 0,$$

Wegen (4) müssen a und b in (3) Null identisch sein,

d.h.

$$a \equiv b \equiv 0,$$

also

$$\delta(u) \equiv 0,$$

$\rho(u)$ muss also eine Periode a haben.

4. Satz 4: Wir wollen nach MINKOWSKI eine Eifläche eine konst-

ante Breite nennen, wenn je zwei parallele Tangentenebenen eine feste Entfernung D voneinander haben.⁽¹⁾

Nennen wir $+\sigma$ und $-\sigma$ zwei diametral geneüberliegende Punkte der Einheitskugel, so gilt für die Stützfunktion einer Eifläche konstanter Breite die kennzeichnende Beziehung⁽²⁾

$$(1) \quad H_{+\sigma} + H_{-\sigma} = D.$$

Es liegt der Gedanke nahe, die Fragestellung MINKOWSKI etwas abzuändern und nach allen Eiflächen zu fragen, für die Querschnittsflächeninhalte der umschriebenen Zylinder konstant sind.

Der von einer solchen Fläche umschlossene Körper soll nach HERGLOTZ ein Eikörper „konstanter Helligkeit“ heissen.⁽³⁾

$$(2) \quad p_1 + p_2 = \text{const.} = c$$

ist notwendig und hinreichend dafür, dass der Eikörper von konstanter Helligkeit ist, wobei⁽⁴⁾

$$(3) \quad \begin{cases} p_1 = (R_1 R_2)_{+\sigma} \\ p_2 = (R_1 R_2)_{-\sigma} \end{cases}$$

Dann wird die Oberfläche:

$$0 = \int_{\text{Kugel}} p dw = \int_{\text{Halb-Kugel}} (p_1 + c - p_1) dw = \int c' dw = 2\pi c'$$

Daher

$$0 = 2\pi c'.$$

Für das Integral der mittleren Krümmung ist

$$M = \int_{\text{Kugel}} H dw = \int_{\text{Halb-Kugel}} (H_1 + D - H_1) dw;$$

also

$$(4) \quad M = 2\pi D.$$

(1) W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel*, Leipzig (1916) S. 138.

(2) l. c. (1) S. 150.

(3) Die Dissertation von HERGLOTZ, *Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse* München (1902).

(4) l. c. (1) S. 152.

Nach MINKOWSKI ist

$$(5) \quad M^2 \geq 4\pi D,$$

also

$$M^2 = 4\pi^2 D' \geq 8\pi^2 c^2,$$

daher

$$(6) \quad D' \geq 2c^2.$$

Zwischen D , Δ , F der Eilinie besteht die Ungleichheit⁽⁵⁾

$$2F \geq \Delta D.$$

Nach einer Beziehung zwischen O und K haben wir⁽⁶⁾

$$O \geq \text{Min } \frac{1}{K} \cdot 4\pi,$$

wobei K GAUSS'sche Krümmung ist.

Nach (3), (4) und (6) ist :

$$\pi D' \geq 2c^2 \pi = O \geq \text{Min } \frac{1}{K} \cdot 4\pi,$$

also folgt der

Satz 5: Wenn alle Projektionen gleichen Inhalt und gleichen Umfang haben, besteht :

$$\pi D' \geq \text{Min } \frac{1}{K} \cdot 4\pi,$$

wobei Δ die Dicke, d.h. der kleinste Wert vom Abstände paralleler Tangenten ist.

5. Es sei C eine Eilinie, O ein fester Punkt in ihrem Innern, u der Winkel der Tangente gegen eine feste Richtung und $p(u)$ die Stützgeradenfunktion von C bezüglich O .

A und B seien die Berührungspunkte zweier Tangenten, die den festen

(5) Vergl. T. KUBOTA: Einige Ungleichheitsbeziehungen über Eilinen und Ellipsen; Science reports of the Tôhoku Imperial University, Vol. XII (1925) p. 51.

(6) l. c. (5) p. 63.

Winkel α miteinander bilden. Dann sei für jedes solche Punktepaar A, B der Flächeninhalt des Kurvensektors AOB konstant.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass wenn α konstant ist, auch der Kurvensektor A_1OA_2 konstant sei, ist folgende :

Das Produkt $p\rho$ muss die Periode α haben, wobei

$$\rho = p + \frac{d'p}{du^2}$$

der Krümmungsradius in Berührungspunkte der Tangente p , u ist.

Dies lässt sich leicht zeigen.

Wenn A_1 und A_2 variieren, so ist

$$d\alpha = du_2 - du_1$$

und, wenn α konstant ist,

$$du_2 = du_1.$$

Der Kurvensektor ist $\int_{u_1}^{u_2} p\rho du$.

Demnach ist die Variation des Sektors, wenn A_1 und A_2 variieren :

$$p_2\rho_2 du_2 - p_1\rho_1 du_1.$$

Ist der Sektor konstant und auch α , so ist

$$p_2\rho_2 = p_1\rho_1,$$

wenn

$$u_2 = u_1 + \alpha.$$

Die Bedingung

$$p(u) = p(u + \alpha)$$

oder

$$r(u) = r(u + \alpha)$$

ist hinreichend und auch notwendig, wie die HURWITZ'she Arbit⁽¹⁾ beweist.

(1) A. HURWITZ: Sur quel ques applications géométriques des séries de FOURIERS; Annales de l'école normale supérieure 19 (1920) S. 357-408.

(9) Über eine Differentialinvariante

Ist ρ der gewöhnliche Krümmungsradius einer ebenen Kurve K und σ ihre Bogenlänge, so gilt für die Deviation φ die Gleichung⁽¹⁾

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{d\sigma},$$

Die Evolute der Evolute einer Kurve K nennt man die zweite Evolute dieser Kurve.

Die Evolute der zweiten Evolute ist die dritte Evolute u. s. w.

Es seien σ_n , ρ_n und φ_n der Bogen der Krümmungsradius und die Deviation der n -ten Evolute in einem Punkte M auf K , dann erhält⁽²⁾ man

$$(2) \quad \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = \frac{d\rho_{n-1}}{d\sigma_{n-1}}.$$

Aus (3) folgt

$$(3) \quad \tan \varphi_n = \frac{1}{3} \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$$

Die natürliche Gleichung der Kegelschnitt ist⁽³⁾

$$(4) \quad \frac{1}{9} \left(\frac{d\rho}{d\sigma} \right)^2 = -1 + A\rho^{\frac{2}{3}} - B\rho^{\frac{4}{3}},$$

also

$$(5) \quad \tan^2 \varphi = -1 + A\rho^{\frac{2}{3}} - B\rho^{\frac{4}{3}},$$

wobei A , B zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Setzen⁽⁴⁾ wir $\rho^{-\frac{1}{3}}$ mit q in (5) ein, dann folgt

$$(6) \quad \tan \varphi = \pm \sqrt{-1 + Aq^{-2} - Bq^{-1}}$$

(1) MATSUMURA, S: Über einen affingometrischen Satz von Herrn T. KUBOTA und die Deviation ebener Kurven. (im Druck).

(2) Vergl. KOWALEWSKI: CÉSARO, Vorlesungen über Natürliche geometrie (1926) S. 34.

(3) l. c. (2) S. 45.

(4) Math. Ann., 60 (1905) S. 258.

Für die Kurve⁽¹⁾ im Tôhoku Math. Journ. vol. 19, p. 208, folgt

$$\tan \varphi = \sqrt{-\{(3n-1)k\}^{-\frac{1}{3n-2}} \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{\frac{4n-2}{3n-2}} + B\rho^{\frac{3}{2}} - 1},$$

wobei B eine Konstante ist.

Wenn x, y als Funktionen eines Parameters vorausgesetzt werden, ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{x'x'' + y'y''}{x'y'} - \frac{1}{3}(x'^2 + y'^2) \frac{x'''y'''}{x'y''}.$$

Für Stützgeradenfunktion gilt

$$\tan \varphi = \frac{1}{3}(p' + p''') \frac{d\theta}{ds}.$$

(10) Wechselseitig affinparallele Affinrotationsflächen

Zwei Flächen ξ und ξ^* heissen nach W. Süss⁽²⁾ *wechselseitig affinparallel*, wenn sie sich punktweise eineindeutig einander durch parallele Normalen sozuordnen lassen, dass die Verbindungsgerade zweier zugeordneter Punkte auf beiden Flächen in diesen Punkten die Affinnormale ist.

Indem wir die Beziehungen der Arbeit von Süss entnehmen, gibt es dann zwei Konstanten p und p^* , sodass nach Definition

$$(1) \quad \xi^* - \xi = p\xi = -p^*\xi^* \quad (p, p^* \text{ const., } \neq 0)$$

ist und hieraus zunächst

$$(2) \quad p\xi^* + p^*\xi = 0$$

und schliesslich als endgültiges Ergebnis

$$(3) \quad \left(1 - \frac{p}{R_1}\right) \left(1 - \frac{p}{R_2}\right) = \left(\frac{p^*}{p}\right)^4 = \text{const.}$$

gestellt werden kann.

(1) HAYASHI, T. On the Osculating Conics of a Plane curve.

(2) Wechselseitig affinparallele Kurven und Flächen, Math. Ann. 98.

Eine Fläche heisst ferner nach W. Süss eine *Affinrotationsfläche*,⁽³⁾ wenn ihre Affinnormalen eine feste Gerade a treffen, die Achse genannt wird, und wenn ihre Meridiane Schattengrenzen sind; Meridian heisst dabei jeder Achsenschnitt der Fläche.

Meridiane und Breitenkurven, längs denen die Affinnormalen die Achse je in einem festen Punkt treffen, sind Affinkrümmungslinien, die Breitenkurven sind einander ähnliche und zur Achse ähnlich gelegene, in parallelen Ebenen verlaufende Kegelschnitte.

Wir beschäftigen uns hier mit wechselseitig affinparallelen Flächen, von welchen die eine eine Affinrotationsfläche ist, und werden beweisen, dass dann auch die andere eine Affinrotationsfläche ist.

Nach der Definition der Affinrotationsflächen ist diese Behauptung offenbar dem folgenden zu beweisenden.

Satz: Wenn sämtliche Affinnormalen einer von zwei wechselseitig affinparallelen Flächen eine feste Gerade a schneiden, so sind beide Flächen Affinrotationsflächen.

Beweis: Der zweiten Arbeit von Süss entnehmen wir zunächst die für eine Fläche \mathfrak{z} , deren Affinnormalen eine Gerade a mit dem Einheitsvektor α treffen, gültigen Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{z} + \alpha \eta = \beta \alpha, & a = R_2, & a_2 = \beta_2 = 0, \\ \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) \mathfrak{z}_1 + \frac{\partial R_2}{\partial u^1} \eta = \beta_1 \alpha. \end{cases}$$

Hierbei sind die Meridiane die Kurven $u^2 = \text{const.}$ und die Breitenkurven $u^1 = \text{const.}$ ausserdem bleiben Affinsphären, für welche unser Satz trivial ist, von der Betrachtung ausgeschlossen; es ist also

$$R_1 \neq R_2.$$

Aus (3) und (4) erhält man zunächst

$$-p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{1}{R_1} \right) \left(1 - \frac{p}{R_2} \right) = 0.$$

Nach (1) und (3) muss hieraus

(3) Ein affingeometrisches Gegenstück zu den Rotationsflächen. Math. Ann. 98

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial u^2} \left(-\frac{1}{R_1} \right) = 0.$$

gefolgt werden.

Da die Affinkrümmungslinien Parameterkurven sind, ist ferner

$$(6) \quad G_{12} = B_{12} = 0.$$

Ferner errechnet man aus (4) (l.c. (2))

$$(7) \quad (\alpha \mathfrak{X})_2 = \alpha \mathfrak{X}_2 = (\mathfrak{X} \mathfrak{X})_2 = \mathfrak{X} \mathfrak{X}_2 = 0.$$

Durch kovariante Differentiation folgt nach (6)

$$(\mathfrak{X} \mathfrak{X})_{12} = -I'_{12} \mathfrak{X} \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \mathfrak{X}_{12} = -A_{12} \mathfrak{X}_1,$$

also

$$(8^a) \quad I'_{12} = A_{12}.$$

Aus (4) erhält man bei kovarianter Ableitung nach den Ableitungsgleichungen

$$(A_{11}^t + I'_{11}^t) \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \mathfrak{X}_1 + (R_2)_1 \mathfrak{X}_2 = 0,$$

also

$$(8^b) \quad A_{12}^t + I'_{12}^t = 0.$$

Deswegen liefert (8^a) bei Benutzung der Apolaritätsbeziehungen

$$(8) \quad A_{12}^t = A_{22}^t = A_{112} = A_{11}^t = I'_{12}^t = I'_{11}^t = \frac{\partial G_{11}}{\partial u^2} = 0.$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass längs eines Meridians $u^2 = \text{const.}$ die Vektoren \mathfrak{X}_1 einander parallel sind, dass also die Meridiane Schattengrenzen sind und somit nach Definition \mathfrak{X} eine Affinrotationsfläche ist.

Wir behaupten zunächst:

$$(9) \quad \left(\mathfrak{X}_1, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{(\partial u^1)^2}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{(\partial u^1)^2} \right) = 0.$$

Es ist nämlich nach (8) und den Ableitungsgleichungen

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{(\partial u^1)^2} = (I'_{11}^t - A_{11}^t) \mathfrak{X}_1 + B_{11} \mathfrak{X}_2,$$

also der Form nach

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{(\partial u^1)^2} = r_1 \mathfrak{X}_1 + s_1 \mathfrak{X},$$

woraus (9) folgt. (9) besagt nun, dass die Vektoren längs eines Meridians $u^2 = \text{const.}$ einer festen Ebene $E(u^2)$ parallel sind, zu welcher nach (10) auch \mathfrak{X} selbst längs $u^2 = \text{const.}$ parallel läuft.

Nun ist, da $\mathfrak{X} \perp \mathfrak{r}_1$,

$$\mathfrak{r}_2 \mathfrak{X} = 0,$$

wegen (6)

$$\mathfrak{r}_2 \mathfrak{X}_1 = -G_{12} = 0$$

und dann nach (10) noch

$$\mathfrak{r}_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{(\partial u^1)^2} = 0.$$

Also ist $\mathfrak{r}_1 \perp E(u^2)$, d.h. längs eines Meridians $u^2 = \text{const.}$ sind die Vektoren \mathfrak{r}_1 einander parallel, wie behauptet worden war.

\mathfrak{r}_1 ist also eine Affinrotationsfläche.

Was die Fläche \mathfrak{r}_1^* betrifft, so gehen nach (1) auch ihre Affinnormalen sämtlich durch die Achse a . Ferner aber ist

$$\mathfrak{r}_2^* = \mathfrak{r}_2 + p \mathfrak{r}_1 = \left(1 - \frac{p}{R_2}\right) \mathfrak{r}_2.$$

Da nun den Affinkrümmungslinien von \mathfrak{r}_2^* nach (1) diejenigen von \mathfrak{r}_1^* entsprechen, insbesondere den Meridianen wieder solche, so lehrt die letzte Gleichung, dass auch auf \mathfrak{r}_1^* die Meridiane Schattenrugen sind, wenn sie es auf \mathfrak{r}_1 sind, wie oben bewiesen wurde.

Es ist also auch \mathfrak{r}_1^* eine Affinrotationsfläche,⁽¹⁾ w. z. b. w.

(1) Tôhoku Math. Journal, im Druck.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (I)

Sōji MATSUMURA (Adoptivname, früher Soji NAKAJIMA)

(Accepted for publication May 18, 1932)

Es sollen hier einige kurze Bemerkungen über Kreisflächen mitgeteilt werden.

(1) Es sei eine Kugel ξ im dreidimensionalen Raum gegeben.

$$(1) \quad \zeta = \xi + \nu \chi$$

sind in χ berührende Kugelhüschel, wobei ν jetzt der eine wesentliche Parameter des Büschels ist.

$$(2) \quad \zeta = \eta + \lambda \mathfrak{z}$$

sind auch in \mathfrak{z} berührende Kugelhüschel, wobei der Parameter ist.

Wir suchen die Bedingung, unter welcher sich die beiden Kugeln ζ und $\bar{\zeta}$ berühren und erhalten die Gleichung:

$$(\hat{\zeta}\eta) + \lambda(\hat{\zeta}\mathfrak{z}) + \nu(\eta\chi) + \lambda\nu(\chi\mathfrak{z}) = 0.$$

Wenn λ und ν vertauschbar sind, oder auf jedem der Gebilde zweiter Ordnung eine Involution bestimmt ist, so folgt:

$$(\hat{\zeta}\mathfrak{z}) = (\eta\chi).$$

Nun betrachten wir die zwei Kugeln

$$\eta = \xi + \nu_1 \chi \quad \text{und} \quad \eta' = \xi + \nu_2 \chi.$$

Wenn eine Kugel \mathfrak{z} senkrecht zu η und η' ist, so folgt:

$$(\mathfrak{z}\eta) = 0, \quad (\mathfrak{z}\eta') = 0,$$

d. h.

$$(\mathfrak{z}^{\mathfrak{c}}) + \nu_1(\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 0,$$

$$(\mathfrak{z}^{\mathfrak{c}}) + \nu_2(\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 0.$$

Also ist

$$(\nu_1 - \nu_2)(\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 0$$

und es folgt

$$\nu_1 = \nu_2 \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 0.$$

Es besteht demnach der ~

Satz: Wenn \mathfrak{z} senkrecht zu γ und \mathfrak{z} ist, dann muss $\gamma \equiv \mathfrak{z}$ oder senkrecht zu \mathfrak{z} sein.

Wenn das Kugelbüschel $\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}$ senkrecht zu \mathfrak{z} ist, dann folgt

$$(2') \quad \lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) + \mu(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0,$$

wobei λ, μ zwei Parametern und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ drei Kugeln sind.

Wenn (2') immer besteht, dann folgt:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = 0, \quad (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0,$$

d. h. \mathfrak{z} ist senkrecht zu \mathfrak{x} und \mathfrak{y} .

(2) Es seien drei Kugeln $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und \mathfrak{W} im R , gegeben. Dann kann man mit

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z} + \nu\mathfrak{W}$$

zwei Punkte im R_2 bezeichnen; somit ergibt sich aus (1):

$$(2) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0 = \lambda^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) + \mu^2(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) + \nu^2(\mathfrak{W}\mathfrak{W}) \\ + 2\lambda\mu'(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + 2\lambda\nu(\mathfrak{y}\mathfrak{W}) + 2\mu\nu(\mathfrak{z}\mathfrak{W}).$$

Wenn $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und \mathfrak{W} zueinander senkrecht stehen, kann man anstatt (2)

$$(3) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

setzen.

Nun setzen wir

$$\lambda = g^2 - h^2,$$

$$\begin{aligned}\mu &= i(g^2 + h^2), & (i = \sqrt{-1}) \\ \nu &= 2gh,\end{aligned}$$

in (1) ein, dann bezeichnen wir mit

$$(4) \quad \mathfrak{y} = (g^2 - h^2)\mathfrak{y} + i(g^2 + h^2)\mathfrak{z} + 2gh\mathfrak{B}$$

zwei Punkte im R_3 als Schnittpunkt der drei orthogonalen Kugeln, wo g und h zwei Parameter sind.

Nun betrachten wir zwei Kurven

$$(5) \quad \begin{aligned}\mathfrak{x}(t) &= (g^2(t) - h^2(t))\mathfrak{y}(t) + i(g^2(t) + h^2(t))\mathfrak{z}(t) \\ &\quad + 2g(t)h(t)\mathfrak{B}(t)\end{aligned}$$

im R_3 , wo t ein Parameter ist, so ist die Tangente in den laufenden Koordinaten $\hat{\mathfrak{x}}$ an der Stelle t , die mittels des Parameters r folgendermassen dargestellt werden kann:

$$(6) \quad \left(\hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \quad -\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \right) = 0$$

ist also die Gleichung der *Schmiegebene*.

Fünf Punkte, für die

$$(7) \quad \mathfrak{x}(t_1), \mathfrak{x}(t_2), \mathfrak{x}(t_3), \mathfrak{x}(t_4), \mathfrak{x}(t_5) = 0$$

ist, liegen auf einer und derselben Kugel, d. h.

$$(8) \quad \begin{aligned}(g^2(t_1) - h^2(t_1))\mathfrak{y}(t_1) + i(g^2(t_1) + h^2(t_1))\mathfrak{z}(t_1) + 2g(t_1)h(t_1)\mathfrak{B}(t_1), \\ (g^2(t_5) - h^2(t_5))\mathfrak{y}(t_5) + i(g^2(t_5) + h^2(t_5))\mathfrak{z}(t_5) + 2g(t_5)h(t_5)\mathfrak{B}(t_5) = 0.\end{aligned}$$

Kurven mit:

$$(9) \quad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}, -\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \right) = 0$$

heissen *Minimallinien* oder *isotrope Kurven*, d. h.

$$\begin{aligned}(2(gg' - hh'))\mathfrak{y} + 2i(gg' + hh')\mathfrak{z} + 2(g'h + gh')\mathfrak{B} \\ + (g^2 - h^2)\mathfrak{y}' + i(g^2 + h^2)\mathfrak{z}' + 2gh\mathfrak{B}',\end{aligned}$$

$$2(gg' - hh')\eta + 2i(gg' + hh')\xi + 2(g'h + gh')\mathfrak{B} \\ + (g^2 - h^2)\eta' + i(g^2 + h^2)\xi' + 2gh\mathfrak{B}' = 0.$$

Sind ξ die Schnittpunkte von η mit dem Nachbarkreise die beiden Enveloppenpunkte, so gilt⁽²⁾

$$(\xi\xi) = (\xi\eta) = \left(\xi \frac{d\eta}{dt} \right) = 0,$$

d. h.

$$\begin{cases} (g^2 - h^2)(\eta\eta) + i(g^2 + h^2)(\xi\xi) + 2gh(\mathfrak{B}\eta) = 0, \\ (g^2 - h^2)(\eta\eta') + i(g^2 + h^2)(\xi\xi') + 2gh(\mathfrak{B}\eta') = 0, \end{cases}$$

also.

$$(10) \quad g^2 = h^2 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B}\eta') = 0.$$

Nehmen wir an, die Kurven seien *isotrop*, so muss die Gleichung lauten :

$$(\ddot{\xi\xi}) = 0$$

Ein Punkt ξ , als Funktion $\xi(u^1, u^2)$ zweier Parameter u^1 und u^2 betrachtet, beschreibt eine Fläche.

Es ist $(\xi\xi) = 0$ identisch in den u^i .

Dann können wir die *Krümmungslinien* in der Form schreiben :

$$(11) \quad |\xi, \xi_1, \xi_2, d\xi_1, d\xi_2| = 0.$$

Wenn

$$(12) \quad (\xi_u \xi_v) = 0$$

ist, dann wird ein Kurvennetz bestimmt, das rechtwinklig wird.

Für den Winkel φ zwier Fortschreitungsrichtungen $\delta\xi$ und $d\eta$ gilt nämlich

$$(13) \quad \cos\varphi = \frac{\delta\xi}{\sqrt{\delta\xi^2}} \frac{\delta'\xi}{\sqrt{\delta'^2\xi^2}}$$

wobei

(2) THOMSEN, G: Über konforme Geometrie II; Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. IV (1925) S. 126.

$$(14) \quad \begin{aligned} \xi(u, v) = & (g^2(u, v) - h^2(u, v))\eta(u, v) + i(g'(u, v) \\ & + h^2(u, v))\zeta(u, v) + 2g(u, v)h(u, v)\mathfrak{B}(u, v) \end{aligned}$$

ist.

Setzen wir

$$(15) \quad (\eta\xi) = 0, \quad (\eta\xi_u) = (\xi\eta) = 0,$$

dann geht die Kugel $\eta(u, v)$ durch den Punkt ξ und alle Nachbarpunkte $\xi + \xi_u du + \xi_v dv$ hindurch, berührt also die Fläche.

Aus (15) folgt:

$$(16) \quad \begin{cases} i\delta_u\eta + \mathfrak{B}_u\eta = 0, \\ i\delta_v\eta + \mathfrak{B}_v\eta = 0. \end{cases} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Es sei nun $\xi(u, v)$ ein zweiparametrisches Punktesystem S . Sollte es reelle Hüllflächen von S geben, so muss nach (14) die quadratische Differentialform

$$(17) \quad \partial\xi^2 = \xi_u^2 \partial u^2 + 2\xi_u\xi_v \partial u \partial v + \xi_v^2 \partial v^2 = c\partial^2 u + 2f\partial u \partial v + g\partial^2 v \geq 0$$

sein, und wir wollen sie dann als positiv definit voraussetzen.

Nennen wir p und q die sphärischen Bilder der beiden Hüllflächen, so wird

$$(18) \quad p^2 = 0, \quad q^2 = 0, \quad p\xi_u = q\xi_v = 0, \quad q\xi_u = p\xi_v = 0,$$

wodurch die Vierervektoren p und q bis auf einen skalaren Faktor festgelegt sind.

Setzen wir die beiden sphärischen Bilder p, q als verschieden voraus —dadurch werden die parabolischen Punktsysteme, die aus einer Schar von Krümmungskugeln einer Fläche bestehen, ausgeschlossen, eine Voraussetzung, die auch schon in der Definitheit von (17) steckt—, so können wir die Willkür dadurch einengen, dass wir

$$(19) \quad pq = 1$$

fordern.

Dann bleibt nur noch ein skalarer Faktor willkürlich.

(3) Ist ξ eine Kugel im R_3 und \mathfrak{z} ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf die Kugel ξ inverse Punkt.

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} (\dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{y}}) &= (2(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\xi})\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}}, 2(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\xi})\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}}) \\ &= 4(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\xi})^2 - 4(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\xi})^2 + (\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}) = (\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}). \end{aligned}$$

Kurven mit $\left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}, \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) = 0$ heissen *Minimallinen* oder *istrophe Kurven*, also bleiben durch Reziprozität die Minimallinien invariant.

Kurven mit :

$$(2) \quad (\lambda\dot{\mathfrak{x}} + \mu\dot{\mathfrak{y}}, \lambda\dot{\mathfrak{x}} + \mu\dot{\mathfrak{y}}) = 0$$

heissen Minimallinien oder isotope Kurven der Kugelbüschel. Aus (2) folgt

$$\lambda^2(\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}}) + 2\lambda\mu(\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{y}}) + \mu^2(\dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{y}}) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \pm \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})};$$

also haben wir im allgemeinen zwei Scharen von Minimallinien.

$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})$ ist die Bedingung dafür, dass zwei Scharen von Minimallinien zusammenfallen.

Ist ξ ein Kreis und \mathfrak{z} ein anderer Kreis im R_2 , so ist

$$\mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Durch

$$\mathfrak{z} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z},$$

wird \mathfrak{z} transformiert zu \mathfrak{z} , d. h. \mathfrak{z} ist invariant infolge Reziprozitäts-
transformation.

Wenn \mathfrak{z} ein invarianter Kreis durch Reziprozität ist, dann folgt

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}\hat{\xi})\hat{\xi} - \mathfrak{z},$$

Bezeichnen wir mit ψ den Winkel zwischen zwei benachbarten Kreise \mathfrak{z} und $\mathfrak{z} + \dot{\mathfrak{z}}dt$, dann folgt⁽²⁾

$$\tan^2 d\psi = d\psi^2 = d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = (\dot{\mathfrak{z}}\hat{\xi})dt^2$$

$$\begin{aligned} \therefore d\sigma^2 &= ((\dot{\mathfrak{z}}\hat{\xi})\hat{\xi}, (\dot{\mathfrak{z}}\hat{\xi})\hat{\xi})dt^2 \\ &= (\dot{\mathfrak{z}}\hat{\xi})^2 dt^2, \quad [(\hat{\xi}\hat{\xi})=1] \end{aligned}$$

$$\therefore d\sigma^2 = \pm \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathfrak{z}}\hat{\xi}) dt.$$

(4) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Tangenten zu zwei Kurven auf einer Kreisfläche sich senkrecht schneiden, ist

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt d\dot{t} + (\theta_t \theta_\tau)(d\dot{t} d\dot{\tau} + d\tau d\dot{t}) + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau d\dot{\tau} = 0,$$

wobei $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ in meiner früheren Arbeit besteht.⁽¹⁾

Nun betrachten wir die differentiale Gleichung.

$$(2) \quad R(t, \tau) dt^2 + 2S(t, \tau) dt d\tau + T(t, \tau) d\tau^2 = 0.$$

Es bestimmt dann (2) ∞^2 Kurvenscharen auf der Kreisfläche, wobei t, τ Kreiskoordinaten bedeuten.

Sind k_1 und k_2 Werte von $d\tau/dt$ in (2), dann folgt aus (2)

$$(3) \quad k_1 + k_2 = -\frac{2S}{T}, \quad k_1 k_2 = \frac{R}{T}.$$

Aus (2) wissen wir, dass zwei Richtungen k_1, k_2 auf einer Fläche senkrecht sind.

$$(4) \quad (\theta_t \theta_t) + (\theta_t \theta_\tau)(k_1 + k_2) + (\theta_\tau \theta_\tau) k_1 k_2 = 0.$$

Aus (3), (4), wissen wir, dass

$$(5) \quad (\theta_t \theta_t) T + (\theta_\tau \theta_\tau) R - 2(\theta_t \theta_\tau) S = 0$$

(1) NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen (IV); Tôhoku Math. Journal, Vol. 32 (1930) p. 210.

(2) l. c. (1) in (1).

die Bedingung dafür ist, dass zwei Richtungen aufeinander senkrecht sind.

(5) Es seien zwei Flächen und ihre Linienelemente, resp.

$$ds_1 = \lambda_1 [(\theta_i \theta_i)_1 dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 d\tau^2]$$

und

$$ds_2 = \lambda_2 [(\theta_i \theta_i)_2 dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_2 dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau)_2 d\tau^2],$$

wobei

$$\lambda_1 (\theta_i \theta_i)_1 : \lambda_2 (\theta_i \theta_i)_2 = \lambda_1 (\theta_i \theta_\tau)_1 : \lambda_2 (\theta_i \theta_\tau)_2 : \lambda_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_1 : \lambda_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_2$$

nicht bestehen.

Wenn zwei Punkte auf je einer Fläche gleich Kurvenkoordinaten haben, nennen wir sie korrespondierend. In diesem Falle korrespondiert ein orthogonales System einer Fläche mit dem orthogonalen System einer anderen Fläche.

Die Gleichung lautet dann :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 [& \{ (\theta_i \theta_\tau)_1 (\theta_i \theta_i)_2 - (\theta_i \theta_\tau)_2 (\theta_i \theta_i)_1 \} dt^2 \\ & + \{ (\theta_i \theta_i)_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_i \theta_i)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 \} dt d\tau \\ & + \{ (\theta_\tau \theta_\tau)_1 (\theta_i \theta_\tau)_2 - (\theta_\tau \theta_\tau)_2 (\theta_i \theta_\tau)_1 \} d\tau^2] = 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} & \{ (\theta_i \theta_\tau)_1 (\theta_i \theta_i)_2 - (\theta_i \theta_\tau)_2 (\theta_i \theta_i)_1 \} dt^2 \\ & + \{ (\theta_i \theta_i)_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_i \theta_i)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 \} dt d\tau \\ & + \{ (\theta_\tau \theta_\tau)_1 (\theta_i \theta_\tau)_2 - (\theta_\tau \theta_\tau)_2 (\theta_i \theta_\tau)_1 \} d\tau^2 = 0. \end{aligned}$$

(6) Ist ξ ein Kreis im R_2 und \mathfrak{x} ein auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(1) \quad \zeta = \xi + r\mathfrak{x}$$

ein sich in \mathfrak{x} mit ξ berührender Kreis.

Ist \mathfrak{B} ein Punkt auf ζ , dann folgt:¹

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}\zeta) &= (\xi\mathfrak{B}) + r(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) \\ \therefore 0 &= (\xi\mathfrak{B}) + r(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) \end{aligned}$$

(1) THOMSEN, G: Über konforme Geometrie II; Abh. aus dem Math. Seminar Bd. IV (1925) S. 123.

$$\therefore r = -\frac{(\hat{\xi}\mathfrak{B})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{B})}.$$

Es folgt aus (1):

$$(2) \quad \zeta = \hat{\xi} - \frac{(\hat{\xi}\mathfrak{B})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{B})} \mathfrak{x}.$$

Für einen anderen Punkt $\bar{\mathfrak{B}}$, besteht auch

$$(2') \quad \bar{\zeta} = \hat{\zeta} - \frac{(\hat{\zeta}\bar{\mathfrak{B}})}{(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{B}})} \mathfrak{x}$$

Sollen nun \mathfrak{x} und $\hat{\zeta}$ die Kreise ζ und $\bar{\zeta}$ harmonisch trennen, so muss

$$(3) \quad D(\hat{\zeta}, \zeta, \mathfrak{x}, \bar{\zeta}) = \frac{(\hat{\zeta}\mathfrak{B})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{B})} \Big/ \frac{(\hat{\zeta}\bar{\mathfrak{B}})}{(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{B}})} = -1$$

gelten, wobei D eine absolute Invariante ist.

Aus (3) folgt:

$$\frac{(\hat{\xi}\mathfrak{B})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{B})} + \frac{(\hat{\xi}\bar{\mathfrak{B}})}{(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{B}})} = 0,$$

d.h.

$$(4) \quad (\hat{\xi}\mathfrak{B})(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{B}}) + (\hat{\xi}\bar{\mathfrak{B}})(\mathfrak{x}\mathfrak{B}) = 0.$$

(4) ist die Bedingung dafür, dass sich \mathfrak{x} , $\hat{\xi}$, ζ und $\bar{\zeta}$ harmonisch trennen.

(7) Betrachten wir vier Kugeln

$$(1) \quad \mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \text{I}, \dots, \text{IV}],$$

im R_3 , dann kann man mit (1) zwei Kegel im R_3 bezeichnen. Wir können zwei neue Kegel

$$(2) \quad \mathfrak{x}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\text{IV}} c_{\beta}^{\alpha} \mathfrak{x}^{\beta} \quad [\alpha = \text{I}, \text{II}, \dots, \text{IV}]$$

als Linearkombinationen der \mathfrak{x}^{α} einführen mit den Koeffizienten c_{β}^{α} , deren Determinante $|c_{\beta}^{\alpha}| \neq 0$ sein muss.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kegel \mathfrak{x}^{α} , \mathfrak{y}^{α} , \mathfrak{z}^{α} , u.s.w.

$[a=I, \dots, IV]$, mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kegeln festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kegel abhängen, nicht von den sie festlegenden Kegeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (2) mit verschiedenen Koeffizientensystemen c_p^a .

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen des Kegels \mathfrak{K} nennen.

Für die Behandlung der Geometrie der Kegel im R_3 erweist es sich als zweckmässig, diese in der angegebenen Weise zunächst durch ganz beliebige vier Kegel darzustellen.

Bilden wir die skalaren Produkte aller dieser Kegel, so können wir aus ihnen das ihnen das vollständige Invariantensystem der Figur der gegebenen Kegel gewinnen.

Um die Invarianten der Kegel zu bekommen, haben wir aus diesen Invarianten noch die Ausdrücke zu bilden, die sich bei vier Substitutionen (2) nicht ändern.

Dabei haben wir noch zu beachten, dass wir möglichen Umnormierungen der Hilskegel \mathfrak{r}^a u.s.w. in den Substitutionen (2) erhalten, sie also nicht mehr besonderes zu berücksichtigen sind.

Betrachten wir zunächst einen Kegel \mathfrak{r}^a .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(\mathfrak{r}^a \mathfrak{r}^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$\overset{*}{A}{}^{ab} = c_p^a c_q^b A^{pq} \quad [\overset{*}{A}{}^{ab} = (\overset{*}{\mathfrak{r}}^a \overset{*}{\mathfrak{r}}^b)].$$

Hier sind alle Indizes von I bis IV, enthalten und es ist über vierfach vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Für das Verhalten der Grössen gegenüber den linearen Büscheltransformationen (2) wollen wir die üblichen Beziehungen der Tensorrechnung einführen.

Für den zu unserem Kegel \mathfrak{K} gehörigen Tensor A^{ab} gelten die Symmetriebedingungen

$$A^{ab} = A^{ba}$$

und es besteht die Tatsache, dass sich ferner die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

$$\bar{A}^* = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun einen eigentlichen reellen Kegel haben, so müssen wir die Determinante $A > 0$ voraussetzen.

Wir betrachten zwei Kegel \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Kegelpaare ξ^{α} und $\tilde{\xi}^{\lambda}$ [$\alpha, \lambda = I, \dots, IV$] dargestellt werden.

Wir definieren zu (2) analog

$$\bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\xi}^{\lambda} \bar{\xi}^{\mu}) \text{ wobei } \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda},$$

und setzen

$$A = \bar{A}^{\lambda\mu} > 0$$

voraus.

Dann haben wir für $\tilde{\mathfrak{K}}$ die Büscheltransformationen

$$(3) \quad \bar{\xi}^{\lambda} = c_{\mu}^{\lambda} \bar{\xi}^{\mu}$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_{μ}^{λ} in (3) sind aber von den c_{β}^{α} in (2) völlig unabhängige neue Größen.

Daher haben wir vier Vektoren und Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von \mathfrak{K} einerseits und von $\tilde{\mathfrak{K}}$ anderseits zu unterscheiden.

So wollen wir für die Büscheltransformationen der ersten Art, wie wir es bisher stillschweigend schon getan haben, nur die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, für die der zweiten Art aber die Indizes λ, μ, ν, \dots verwenden.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$||\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, \bar{\xi}^I, \bar{\xi}^{II}, \bar{\xi}^{III}|| \equiv 0$$

ist, indem eine lineare Beziehung der Form

$$(4) \quad \sigma_{\alpha} \xi^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda} \bar{\xi}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (4) ist aber die, dass es ein Paar von Punkten

$$\mathfrak{z} = \sigma_{\alpha} \bar{x}^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda} \bar{x}^{\lambda}$$

gibt, die auf beiden Kegeln liegen.

(8) Die Bedingung, dass zwei Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche S: $\frac{dt}{d\tau}$ und $\frac{dt'}{d\tau'}$ die abgekürzt mit m und m' bezeichnet werden mögen,⁽¹⁾ aufeinander senkrecht stehen, ist

$$(A) \quad (\theta, \theta_t) mm' + (\theta, \theta_{\tau})(m + m') + 1 = 0.$$

Sind zwei Flächen S und S₁ durch ihre Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(t, \tau), \\ x_1 = x_1(t_1, \tau_1), \end{cases}$$

gegeben, und bestehen zwischen den Parametern $t, \tau; t_1, \tau_1$ zwei weitere Gleichungen

$$(2) \quad F(t, \tau, t_1, \tau_1) = 0, \quad \Phi(t, \tau, t_1, \tau_1) = 0,$$

oder nach t_1 und τ_1 aufgelöst

$$(2a) \quad t_1 = F_1(t, \tau), \quad \tau_1 = \Phi_1(t, \tau),$$

so sind die Flächen derart aufeinander bezogen, dass jeder Kugel P (t, τ) der einen eine Kugel P₁ (t_1, τ_1) der andern entspricht, und umgekehrt.

Die Zuordnung ist nun derart, dass zu jedem Wertepaar t, τ eine Kugel P auf S und eine Kugel P₁ auf S₁ gehört oder dass für zwei entsprechende Kugeln die Parameter t, τ auf beiden Flächen dieselben Werte haben.

Da sich sonach jede beliebige, durch (1) und (2), bzw. (2a) gegebene kugelweise Zuordnung zweier Flächen auf die angegebene Weise in eine solche überführen lässt, bei der den entsprechenden Kugeln gleiche Parameterwerte zukommen, so kann, unbeschadet der Allgemeinheit, eine beliebige, kugelweise Zuordnung der beiden Flächen durch Gleichungen von der Form (I) ausgedrückt werden.

(1) Vergl. (1) in (4).

Nun können wir nämlich ihre Differentialgleichung der Krümmungslinien in der Form schreiben:⁽¹⁾

$$\theta, \theta_1, \theta_2, d\theta_1, d\theta_2 | = 0, \quad \left(\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right).$$

Für jede dieser Kurven muss es eine Kugel gegeben die die Fläche ausser im Punkt⁽²⁾ θ auch noch im Nachbarpunkte der Kurve berührt. Bekanntlich gibt es aber nur zwei solche Kugeln, die Hauptkugeln, und die durch sie gekennzeichneten ausgezeichneten Richtungen auf der Fläche sind die Hauptkrümmungsrichtungen.

$$\xi(t, \tau), \xi(t, \tau) + \lambda_1(t, \tau)\theta(t, \tau), \xi(t, \tau) + \lambda_2(t, \tau)\theta(t, \tau), \dots$$

sind die Kugelbüschel, die in θ die Kreisfläche berühren, wobei

$$(\theta\theta) = 0, \quad (\theta\xi_t) = 0, \quad (\theta\xi_\tau) = 0$$

ist.

Die Schar der Berührungskugeln des Hüllgebildes an die Stelle θ wird durch

$$\eta = \xi(t, \tau) + \lambda(t, \tau)\theta(t, \tau), \quad (\lambda = \text{Skalar!})$$

dargestellt. Die Kugeln des Systems $\eta = \xi + \lambda\theta$ haben somit dem ursprünglichen System das Hüllgebilde mit dem Punkt θ gemein.

Die dem Hüllgebilde umschriebenen Torsen, für die sich λ so ermitteln lässt, dass für die Berührungskugel $\xi + \lambda\theta$

$$\partial(\xi + \lambda\theta) = \mu\theta$$

wird, nennt man „*Krümmungstorsen*“ und die zugehörigen Kugeln $\xi + \lambda\theta$ „*Krümmungskugeln*“ des Hüllgebildes, so haben wir:

$$(\mu\partial\xi) = 0, \quad (\theta\theta) = 0, \quad (\theta\partial\theta) = 0.$$

Also:

- (1) THOMSEN, G.: Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. III, 1924, S. 37, und (11), in (2).
- (2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, (VIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32 (1930) p. 214.

$$\theta_i(\delta\xi + a\theta + \beta\delta\theta) = 0,$$

$$\theta\tau(\delta\xi + a\theta + \beta\delta\theta) = 0.$$

Sind t -Kurven und τ -Kurven senkrecht, dann ist

$$(\theta_i, \theta_\tau) = 0,$$

und es folgt:

$$\xi_i = a_i\theta + \beta_i\theta_i, \quad \xi_\tau = a_\tau\theta + \beta_\tau\theta_\tau.$$

Wegen $\theta^2 = 0$, $\theta\theta_i = \theta\theta_\tau = 0$ folgt dann auch

$$(\xi_i, \xi_\tau) = 0.$$

Es sei im R_3^0 eine orientierte Fläche F gegeben und auf ihr eine Kurve \mathfrak{C} .

Wir können F als das eine Hüllgebilde einer zweiparametrischen Kugelschar $\mathfrak{x}(t, \tau)$ auffassen.

Aus diesen ∞^2 Kugeln greifen wir eine einparametrische Schar

$$\mathfrak{x}(t, \tau = \tau(t)) = \mathfrak{x}(t)$$

heraus, etwa alle Kugeln von $\mathfrak{x}(t, \tau)$, die \mathfrak{F} längs \mathfrak{C} berühren.

Unter einem Streifen soll die Kurve \mathfrak{C} mit den Ebenenelementen verstanden werden, die F in \mathfrak{C} berühren.

In einer anderen Auffassung besteht der Streifen aus den Kugeln längs \mathfrak{C} mit den zugehörigen Tangentenebenen an \mathfrak{F} .

Es sei $\mathfrak{x}(t)$ die einparametrische Kugelschar, $\theta(t)$ mit $\theta^2 = 0$ die Stellung der zugehörigen Ebenenelemente.

Wenn wir Ableitungen nach dem Parameter t mit Punkten bezeichnen, so lautet die Bedingung dafür, dass zwei Nachbarkugeln \mathfrak{x} die Ebene θ berühren:

$$(1) \quad \dot{\mathfrak{x}}\theta = 0.$$

Zwei Funktionen $\mathfrak{x}(t)$ und $\theta(t)$ mit $\theta^2 = 0$ und mit der Streifenbedingung (1) stellen einen Streifen dar.

Wir erhalten denselben Streifen, wenn wir $\mathfrak{x}(t)$ durch

$$(2) \quad \hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(t) + \lambda(t)\theta(t)$$

ersetzen, weil die Bedingung (1) auch für $\hat{x}(t)$ erfüllt ist.

Es ist ja

$$(3) \quad \dot{\hat{x}}\theta = (\dot{x} + \dot{\lambda}\theta + \lambda\dot{\theta})\theta = 0$$

vermöge $\dot{x}\theta = 0$, $\theta^2 = 0$ und der daraus folgenden Gleichung

$$\theta\dot{\theta} = 0.$$

(9) Wir betrachten zwei Kreise im R_1 bei denen alle Kugeln durch den einen Kreis den Winkel φ mit dem andern bilden.

Ist

$$\hat{y} = \hat{\rho}_a \hat{x}^a$$

eine normierte Kugel durch einen Kreis \mathfrak{K} im R_1 wobei

$$\hat{y}\hat{y} = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b A^{ab} = 1$$

ist, so muss

$$\cos^2 \varphi = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b T^{ab}$$

Sein. Nun betrachten wir

$$\cos \varphi = 0,$$

dann gelten die beiden Gleichungen :

$$(1) \quad A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2 - 1 = 0,$$

$$(2) \quad T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2 = 0.$$

Diese Gleichungen bezeichnen zwei Kegelschnitte in der (ρ_1, ρ_2) -Ebene.

Betrachten wir gemeinsame Punkte von (1) und (2), dann haben wir vier Punkte im allgemeinen, und dann folgt aus (2)

$$T^{11}(\rho_1 - \lambda_1 \rho_2) (\rho_1 - \lambda_2 \rho_2) = 0,$$

wobei λ_1, λ_2 zwei reelle Konstanten sind. Aus (1) und (2) erhalten wir dann :

$$(3) \quad \rho_2 = \frac{T^{12}}{A\lambda_1^2 - B} \quad \text{oder} \quad \frac{T^{12}}{A\lambda_2^2 - B},$$

denn aus (1) und (2) haben wir

$$\rho_1^2(T^{12}A^{11} - A^{12}T^{11}) - \rho_2^2(-A^{22}T^{12} + A^{12}T^{22}) = T^{12},$$

d.h.

$$\rho_1^2 A - \rho_2^2 B = T^{12},$$

wobei

$$A = T^{12}A^{11} - T^{11}A^{12} \quad \text{und} \quad B = -T^{12}A^{22} + T^{22}A^{12}$$

sind.

Aus (3) haben wir den

Satz: Wenn für gegebene A und T ρ_1 und ρ_2 reell bestehen, dann muss

$$\frac{T^{12}}{A\lambda_1^2 - B} \quad \text{oder} \quad \frac{T^{12}}{A\lambda_2^2 - B}$$

positiv sein.

(10) Als Minimallinien haben wir

$$(\theta_i \theta_i) dt^i + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Es seien

$$(1) \quad \begin{cases} (\theta_i \theta_i) dt^i + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0, \\ (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) dt^i + 2(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau) dt d\tau + (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau) d\tau^2 = 0, \end{cases}$$

Zwei Minimallinien, dann ist

$$\frac{(\theta_i \theta_i)}{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i)} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{(\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau)} = \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)},$$

die Bedingung dafür, dass zwei Kreisflächen konform sind.

Setzen wir

$$(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau) (\theta_i \theta_i) \equiv A,$$

$$(\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau) (\theta_i \theta_i) - (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) (\theta_\tau \theta_\tau) \equiv B,$$

$$(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) (\theta_i \theta_\tau) - (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau) (\theta_i \theta_i) \equiv C,$$

dann sind die Bedingungen dafür, dass zwei Flächen konform sind

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0.$$

Wenn Gleichung (1) eine gemeinsame Wurzel $dt: d\tau$ haben, dann besteht :

$$B^2 - 4AC = 0;$$

denn aus (1) folgt :

$$\frac{dt^2}{(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_\tau)(\theta_t, \theta_\tau) - (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_t)(\theta_\tau, \theta_t)} - \frac{2dtd\tau}{(\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_t)(\theta_\tau, \theta_t) - (\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_\tau)(\theta_t, \theta_\tau)} = \frac{d\tau^2}{(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t)(\theta_t, \theta_\tau) - (\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_\tau)(\theta_\tau, \theta_t)},$$

d.h.

$$\frac{dt^2}{A} - \frac{2dtd\tau}{B} = \frac{d\tau^2}{C}.$$

Sind $\partial t, \partial \tau$ und $\partial' t, \partial' \tau$ zwei senkrechte Paare der Richtungen auf zwei Kreisflächen, dann gelten die Gleichungen :

$$(\theta_t, \theta_t) \partial t \partial' t + (\theta_\tau, \theta_\tau) (\partial t \partial' \tau + \partial \tau \partial' t) + (\theta_\tau, \theta_\tau) \partial \tau \partial' \tau = 0,$$

$$(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t) \partial t \partial' t + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) (\partial t \partial' \tau + \partial \tau \partial' t) + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) \partial \tau \partial' \tau = 0.$$

Also haben wir :

$$\partial t \partial' t = \sigma A,$$

$$\partial t \partial' \tau + \partial \tau \partial' t = \sigma B,$$

$$\partial \tau \partial' \tau = \sigma C,$$

wobei σ der Proportionsfaktor ist, und es sind $\partial \tau : \partial t$ und $\partial' \tau : \partial' t$ zwei Wurzeln der Gleichung

$$At^2 - Bt + C = 0.$$

Also haben wir ein Paar senkrechter Linien.

Es seien :

$$(\theta_t, \theta_t) = \lambda f(t), \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = \lambda g(\tau), \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0.$$

in

$$(\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

dann gilt:

$$(\theta_i \theta_i) : (\theta_\tau \theta_\tau) = f(t) : g(\tau);$$

hieraus folgt dann:

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \left\{ \log \frac{(\theta_i \theta_i)}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right\} = 0.$$

In Worten:

(2) ist notwendige Bedingung dafür, dass

$$(\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2$$

auch in der Form

$$\lambda(dT^2 + dL^2)$$

schreibbar ist, wobei T Funktion von t und L Funktion von τ sind.

(11) Jedes Kreisbüschel (ξ^I, ξ^{II}) kann in der Form

$$(1) \quad \xi = \xi^I - \lambda \xi^{II}$$

dargestellt werden.

Aus (1) erhält man

$$(\xi \xi) = (\xi^I \xi^I) - \lambda \lambda (\xi^I \xi^{II}) + \lambda^2 (\xi^{II} \xi^{II}).$$

Wenn ξ ein Punkt ist, so muss

$$(\xi \xi) = 0$$

sein.

Daher erhält man folgende in λ quadratische Gleichung

$$(2) \quad \lambda^2 (\xi^{II} \xi^{II}) - 2\lambda (\xi^I \xi^{II}) + (\xi^I \xi^I) = 0,$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 in (I) eingesetzt die beiden dem linearen Büschel (ξ^I, ξ^{II}) und dem Punkte gemeinsamen Kreise ξ^I und ξ^{II} liefern.

Man hat also

$$\xi_1 = \xi^I - \lambda_1 \xi^{II},$$

$$\xi_2 = \xi^I - \lambda_2 \xi^{II};$$

folglich entsteht des Doppelverhältniss der vier Kreise $\xi^I, \xi^{II}, \xi_1, \xi_2$:

$$(3) \quad (\xi^I, \xi^{II}, \xi_1, \xi_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Die Auflösung der Gleichung (2) ergibt aber:

$$\lambda_1 = \frac{(\xi^I \xi^{II}) + \sqrt{(\xi^I \xi^{II})^2 - (\xi^I \xi^I)(\xi^{II} \xi^{II})}}{(\xi^{II} \xi^{II})},$$

$$\lambda_2 = \frac{(\xi^I \xi^{II}) - \sqrt{(\xi^I \xi^{II})^2 - (\xi^I \xi^I)(\xi^{II} \xi^{II})}}{(\xi^{II} \xi^{II})}.$$

Sollen nun ξ_1 und ξ_2 die Kreise ξ^I und ξ^{II} harmonisch trennen, so muss

sein, d. h.

$$(4) \quad (\xi^I \xi^{II}) = 0$$

(4) ist eine Bedingung dafür, dass ξ^I und ξ^{II} aufeinander senkrecht sind.

Also **in Worten**: Wenn ξ_1 und ξ_2 die Kreise ξ^I und ξ^{II} harmonisch trennen, so muss ξ^I und ξ^{II} aufeinander senkrecht sein.

(12) Setzen wir

$$\xi = \lambda_1 \xi^I + \lambda_2 \xi^{II},$$

wobei ξ^I senkrecht ans ξ^{II} steht, so müssen λ_1 und λ_2 der Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

genügen.

Denn es ist:

$$(\xi \xi) = 1 = \lambda_1^2 (\xi^I \xi^I) + 2\lambda_1 \lambda_2 (\xi^I \xi^{II}) + \lambda_2^2 (\xi^{II} \xi^{II}),$$

weil

$$(\xi^I \xi^I) = (\xi^{II} \xi^{II}) = 1 \quad \text{und} \quad (\xi^I \xi^{II}) = 0$$

sind.

Man kann daher einen Hilfswinkel φ einführen, der durch die

Gleichungen bestimmt wird:

$$\lambda_1 = \cos \varphi, \quad \lambda_2 = \sin \varphi$$

Also haben wir die Gleichung:

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \cos \varphi \cdot \mathfrak{x}^I + \sin \varphi \cdot \mathfrak{x}^{II},$$

Es folgt dann:

$$\cos \varphi = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}^I), \quad \sin \varphi = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}^{II}).$$

Nehmen wir zwei Kreise \mathfrak{x} und \mathfrak{y} wie in (1) an, dann sind

$$\mathfrak{x} = \cos \varphi \cdot \mathfrak{x}^I + \sin \varphi \cdot \mathfrak{x}^{II},$$

$$\mathfrak{y} = \cos \varphi \cdot \mathfrak{x}^I + \sin \varphi \cdot \mathfrak{x}^{III},$$

wobei \mathfrak{x}^I senkrecht auf \mathfrak{x}^{III} steht.

Also gilt:

$$(2) \quad (\mathfrak{x} \mathfrak{y}) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot (\mathfrak{x}^{II} \mathfrak{x}^{III}).$$

Bezeichnen wir den von \mathfrak{x}^{II} und \mathfrak{x}^{III} eingeschlossenen Winkel mit α , dann folgt aus (2) die Beziehung Zwischen α und φ :

$$(3) \quad \cos \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \alpha$$

wobei φ der von \mathfrak{x} und \mathfrak{y} eingeschlossene Winkel ist. **in Worten** In unserem Fall besteht (2).

13. Es seien \mathfrak{x}^I und \mathfrak{x}^{II} reelle eigentliche Kreise im R_n .

Es sei α ein beliebiger Kreis, der zu $\mathfrak{x}^I - \mathfrak{x}^{II}$ normal ist, so folgt:

$$(1) \quad \alpha(\mathfrak{x}^I - \mathfrak{x}^{II}) = 0,$$

d. h.

$$(2) \quad \alpha \mathfrak{x}^I = \alpha \mathfrak{x}^{II}.$$

Umgekehrt folgt aus (2) wieder (1).

(2) Bedeutet, dass \mathfrak{x}^I und \mathfrak{x}^{II} mit α gleichen Winkel bilden. So gilt der

Satz: Jeder Kreis α , welcher zu $\mathfrak{x}^I - \mathfrak{x}^{II}$ normal ist, bildet mit \mathfrak{x}^I und \mathfrak{x}^{II} den gleichen Winkel, und umgekehrt, alle Kreise, welche mit \mathfrak{x}^I und \mathfrak{x}^{II} gleichen Winkel haben, sind zu $\mathfrak{x}^I - \mathfrak{x}^{II}$ normal.

Normieren wir \mathfrak{x}^I , \mathfrak{x}^{II} und setzen wir:

$$(\xi^I \xi^I) = 1, \quad (\xi^{II} \xi^{II}) = 1,$$

dann folgt die Bedingung :

$$\xi^I(\xi^I + \xi^{II}) = \xi^{II}(\xi^I + \xi^{II})$$

oder in Worten : $\xi^I + \xi^{II}$ sind die Kreise, die mit ξ^I und ξ^{II} gleichen Winkel geben.

Es besteht

$$(\xi^I + \xi^{II})(\xi^I - \xi^{II}) = 0,$$

d. h. $(\xi^I + \xi^{II})$ sind senkrecht zu $(\xi^I - \xi^{II})$.

Bilden ξ^I mit ξ^{II} und ξ^{III} gleichen Winkel, dann besteht :

$$\xi^{II}(\xi^I - \xi^{II}) = \xi^{III}(\xi^I - \xi^{III}),$$

in Worten : ξ^I, ξ^{III} bilden gleichen Winkel mit $(\xi^I - \xi^{II})$ und $(\xi^I - \xi^{III})$.

(14) Es seien drei Kreise $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ im R , bei denen alle Kugeln durch den \mathfrak{R}_1 gleichen Winkel mit dem andern bilden.

Ist $\hat{\eta} = \hat{\rho}_s \xi^s$ eine normierte Kugel durch \mathfrak{R}_1 mit

$$\hat{\eta} \hat{\eta} = \hat{\rho}_s \hat{\rho}_s \Lambda^{ss} = 1,$$

so muss

$$\cos^s \varphi = \hat{\rho}_s \hat{\rho}_s T^{ss},$$

$$\cos^s \bar{\varphi} = \hat{\rho}_s \hat{\rho}_s \bar{T}^{ss},$$

unabhängig von $\hat{\rho}_s$ sein, wobei $\varphi, \bar{\varphi}$ den Winkeln zwischen η und \mathfrak{R}_2 bzw. $\bar{\eta}$ und \mathfrak{R}_1 sind.

Dass ist nur möglich für

$$T^{ss} \text{ prop. } \Lambda^{ss},$$

$$\bar{T}^{ss} \text{ prop. } \Lambda^{ss},$$

also folgt :

$$T^{ss} \text{ prop. } \bar{T}^{ss}.$$

Wenn T^{ss} prop. \bar{T}^{ss} ist, dann folgt :

$$\cos^2 \varphi : \cos^2 \bar{\varphi} = \text{const.},$$

also folgt :⁽¹⁾

$$A_{a,p} \hat{D}^* \hat{D}^p : \bar{A}_{a,p} \bar{D}^* \bar{D}^p = \text{const.}$$

(15) Wenn a , b und c die Koordinaten des Mittelpunktes einer Kugel im R_3 vom Radius r und x , y und z die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes darstellen, so ist die Potenz P dieses Punktes in bezug auf die Kugel gleich

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2,$$

während die Potenz P desselben Raumpunktes für die Kugel von den Mittelpunktsskoordinaten A , B und C und dem Radius R den Wert

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 - R^2$$

besitzt.

Ist ferner der Punkt so gewählt, dass seine Potenzen in bezug auf die beiden Kugeln der Beziehung

$$f(r, P) = 0$$

genügen, so gehört er der Fläche an, welche durch die Gleichung

$$f[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2, (x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 - R^2] = 0$$

dargestellt ist.

Diese Fläche möge die Potenzfläche der zwei Kugeln für die Beziehung

$$f(r, P) = 0$$

genannt werden.

Wenn a , b , c , r , A , B , C und R Funktionen desselben veränderlichen Parameters τ sind, so bestimmen diese Größen zwei Kugelsysteme.

Die demselben Wert des Parameters entsprechenden Kugeln der beiden Systeme seien einander zugeordnet.

Je zwei einander zugeordnete Kugeln entsprechen den zugehörigen Wert des Parameters, und es besteht die Beziehung für eine Potenzfläche :

(1) Vergl. NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen, (I); Tôhoku Math. Journal, Vol. 31 (1925) p. 25.

$$(1) \quad f(r, P, \tau) = 0$$

Es kann nun die Aufgabe gestellt werden: Die Einhüllungsfläche aller Potenzflächen zu ermitteln.

Nehmen wir anstatt (1)

$$(2) \quad F(x, y, z, \tau) = 0,$$

indem wir τ einen bestimmten Wert beilegen, und errichten wir in einem Punkte der Fläche die Normale, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so schneidet dieselbe die benachbarte Fläche.

$$(3) \quad F(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = 0$$

der Schar in einem Punkte, dessen Koordinaten, wenn wir den Abstand des Schnittpunktes vom Fußpunkt der Normale mit h bezeichnen, die Werte haben:

$$\xi = x + h \cos \alpha;$$

$$\eta = y + h \cos \beta;$$

$$\zeta = z + h \cos \gamma.$$

Setzen wir $\left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \omega^2$, so erhalten wir

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = x + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \eta = y + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \zeta = z + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial z} \end{cases};$$

Die aus den Gleichungen (4) sich für ξ, η, ζ ergebenden Werte müssen der Gleichung (3) genügen.

Es ergibt sich

$$(5) \quad F\left(x + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial x}, y + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial y}, z + \frac{h}{\omega} \frac{\partial F}{\partial z}, \tau + \Delta\tau\right) = 0$$

oder, wenn wir nach der *Taylor'schen* Reihe entwickeln:

$$(6) \quad F(x, y, z, \tau) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{h}{\omega} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{h}{\omega} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{h}{\omega} \\ + \dots + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta \tau + \dots = 0$$

oder

$$(7) \quad h\omega + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta \tau + \dots = 0.$$

Für eine unendlich kleine Änderung des Parameters τ erhalten wir

$$(8) \quad h = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau}{\omega} = t d\tau,$$

wobei wir unbeschadet der Allgemeinheit $d\tau$ als positiv voraussetzen können.

Um Striktionslinien oder -flächen zu erhalten, haben wir etwaige Maxima oder Minima von t zu untersuchen.

t ist eine Funktion oder Variable von x, y, z von denen aber infolge der Gleichung (2) nur zwei unabhängig sind, während die dritte Variable mit Hilfe der Gleichung (2) eliminiert werden kann.

Betrachten wir etwa x und y als unabhängige Variablen, so sind die Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums⁽¹⁾:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial z} \frac{F_x}{F_z} = 0 \\ \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial z} \frac{F_y}{F_z} = 0 \end{cases}$$

wobei F_x, F_y, F_z die partiellen Ableitungen von $F(x, y, z, \tau)$ nach x, y, z bedeuten.

Wir erhalten die Gleichungen

- (1) **FERRARI, F:** Untersuchungen über das Striktionsystem einer einfach unendlichen Flächenschar, Beilage zum Jahresbericht Ostern (1912), Friedrich-Wilhelm-Gymnasium zu Kottbus S. 3.

$$(10) \quad \begin{cases} F_x \frac{\partial t}{\partial x} - F_z \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \\ F_y \frac{\partial t}{\partial y} - F_z \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen τ mit Hilfe von (2), so stellen sie das Striktionssystem dar.

Dies ist jedoch nur der Fall, wenn

$$(11) \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$$

ist, und zwar wird t ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} < 0$, ein Minimum, wenn

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0$$

ist.

(16) (I) Es sei eine einfache unendliche Schar von Kreisflächen im R_n durch die Gleichungen

$$x^I = x^I(t, \alpha), \quad x^{II} = x^{II}(t, \alpha)$$

beschrieben,⁽¹⁾ und man sage, dass sie bei veränderlichem t die Koordinaten $\{x^I, x^{II}\}$ der Kreise im R_n der Kreisfläche (α_0) geben, wenn die willkürliche Konstante α diesen Wert besitzt.

Neben der Kreisfläche (α) betrachte man eine zweite $(\alpha + \Delta\alpha)$, und bemerke, dass die Koordinaten eines beiden Kreisflächen angehörenden Kreises sowohl durch Ausdrücke:

$$x^I(t, \alpha), \quad x^{II}(t, \alpha),$$

als auch durch Ausdrücke:

$$x^I(t + \Delta t, \alpha + \Delta\alpha), \quad x^{II}(t + \Delta t, \alpha + \Delta\alpha)$$

anzugeben sind, deshalb für die Koordinaten der Schnittkreise beider Kreisflächen die Gleichungen gelten:

(1) NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen. (II); Tôhoku Math. Journal, Vol. 31 (1929), S. 36.

$$\xi^I = \xi^I(t, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, a),$$

$$0 = (\xi^I(t + \Delta t, a + \Delta a) - \xi^I(t, a + \Delta a)) \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$+ (\xi^I(t, a + \Delta a) - \xi^I(t, a)) \frac{\Delta a}{\Delta a},$$

$$0 = (\xi^{II}(t + \Delta t, a + \Delta a) - \xi^{II}(t, a + \Delta a)) \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$+ (\xi^{II}(t, a + \Delta a) - \xi^{II}(t, a)) \frac{\Delta a}{\Delta a} = 0.$$

Daraus folgt nun, dass für die Koordinaten der Schnittkreise der Kreisfläche (a) mit einer unendlich benachbarten Kreisfläche der Schar die Beziehungen bestehen :

$$\xi^I = \xi^I(t, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, a),$$

$$\frac{\partial \xi^I}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi^I}{\partial a} da = 0, \quad \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi^{II}}{\partial a} da = 0.$$

Weil die letzten beiden Gleichungen nur richtig sind, wenn die Funktionaldeterminante :

$$\frac{\partial(\xi^I, \xi^{II})}{\partial(t, a)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^I}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial a} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial a} \end{vmatrix}$$

verschwindet, und umgekehrt mit verschwindender Determinante zwei Gleichungen der früheren Art bestehen, so ergibt sich, dass der Ort von Schittkreisen unendlich benachbarter Kreisflächen der Schar, d. h. die *Einhüllende der Kreisflächen durch die Gleichungen*

$$\xi^I = \xi^I(t, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, a)$$

definiert wird, wenn nur a die durch die Gleichung :

$$\frac{\partial(\xi^I, \xi^{II})}{\partial(t, a)} = 0$$

bestimmte Funktion der unabhängigen Veränderlichen t bedeutet.

(II) Hat man die Einhüllende zweier Scharen von ∞^2 Raumkurven im R_n zu finden, die durch drei Gleichungen

$$\mathbf{x}^I = \mathbf{x}^I(t, a), \quad \mathbf{x}^{II} = \mathbf{x}^{II}(t, a), \quad \mathbf{x}^{III} = \mathbf{x}^{III}(t, a)$$

gegeben sind, so nehme man neben der Kurven (a) die einem Parameterwerte ($a + \Delta a$) zugehörige Kurve auf und beachte, dass in jedem etwaigen Schnittpunkte beider Kurven die drei Relationen :

$$\mathbf{x}^I(t + \Delta t, a + \Delta a) - \mathbf{x}^I(t, a) = 0,$$

$$\mathbf{x}^{II}(t + \Delta t, a + \Delta a) - \mathbf{x}^{II}(t, a) = 0,$$

$$\mathbf{x}^{III}(t + \Delta t, a + \Delta a) - \mathbf{x}^{III}(t, a) = 0$$

bestehen, also in den Punkten der etwaigen Einhüllenden die drei zweizeiligen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{x}^{II}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{x}^{III}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{x}^{II}}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{x}^{III}}{\partial a} \end{array} \right\|$$

verschwinden müssen.

(III) Eine Schar von $2\infty^2$ Kurven in R_n

$$\mathbf{x}^I = \mathbf{x}^I(t, a_1, a_2), \quad \mathbf{x}^{II} = \mathbf{x}^{II}(t, a_1, a_2), \quad \mathbf{x}^{III} = \mathbf{x}^{III}(t, a_1, a_2)$$

hat zur Einhüllenden zwei Flächen in deren Punkten

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^I, \mathbf{x}^{II}, \mathbf{x}^{III})}{\partial(t, a_1, a_2)} = 0$$

ist ; und zwei Scharen von ∞^2 Kurven, welche durch Gleichung

$$\mathbf{x}^I = \mathbf{x}^I(t, a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{x}^{II} = \mathbf{x}^{II}(t, a_1, a_2, a_3),$$

$$\mathbf{x}^{III} = \mathbf{x}^{III}(t, a_1, a_2, a_3), \quad \omega(a_1, a_2, a_3) = 0$$

gegeben sind, besitzen wieder in zweier Flächen ihre Einhüllende, in deren Punkten aber

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^I, \mathbf{x}^{II}, \mathbf{x}^{III})}{\partial(t, a_1, a_2, a_3)} = 0$$

ist.

(IV) Handelt es sich endlich um die Einhüllende einer $2\infty_1$ Schar von Flächen im R_n , welche durch Gleichungen :

$$\xi^I = \xi^I(t, \tau, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, a)$$

dargestellt seien, in denen a wieder einen Parameter zur Unterscheidung der Flächen von einander bedeutet, aber t und τ die Parameter zur Punktbestimmung auf der Fläche sind, so führt eine Erwägung gleicher Art wie früher zu dem Ergebnis: der Ort von Schnittpunkten unendlich benachbarter Flächen der Schar, d. h. die Enveloppe, ist durch die Gleichungen

$$\xi^I = \xi^I(t, \tau, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, a)$$

definiert, wenn nur als die durch die Gleichung :

$$F(t, \tau, a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^I}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial \tau} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \tau} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial a} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial a} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial a} \end{vmatrix}$$

bestimmte Funktion von t und τ betrachtet wird.

Geht man von drei Flächen (a) , $(a + \Delta_1 a)$, $(a + \Delta_2 a)$ aus, so gelten für die Koordinaten der ihnen gemeinsamen Punkte Gleichungen der Form :

$$\xi^I = \xi^I(t, \tau, a), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, a)$$

$$\xi^I(t + \Delta_1 t, \tau + \Delta_1 \tau, a + \Delta_1 a) - \xi^I(t, \tau, a) = 0, \dots$$

$$\xi^I(t + \Delta_2 t, \tau + \Delta_2 \tau, a + \Delta_2 a) - \xi^I(t, \tau, a) = 0, \dots$$

und wenn man die drei Flächen unendlich benachbart wählt, so ergeben sich bei dem Grenzübergang aus den zweiten drei Gleichungen die Beziehungen :

$$\frac{\partial \xi^I}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi^I}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \xi^I}{\partial a} da = 0,$$

$$\frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \xi^{II}}{\partial a} da = 0,$$

$$\frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial t} dt + \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial \alpha} d\alpha = 0,$$

d. h. es muss

$$F(t, \tau, \alpha) = 0$$

sein.

(17) In den Parametern t, τ lautet die Differentialgleichung der Minimallinien⁽¹⁾

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Durch jeden Flächenpunkt gehen nach (1) zwei Minimallinien; dieselben sind stets imaginär, da die Discriminante von (1)

$$\Delta^2 = (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2$$

stets positiv ist.

Durch Spaltung von (1) in zwei Linearfaktoren erhält man

$$(2) \quad \sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau = 0,$$

$$(3) \quad \sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - i\Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau = 0,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ ist.

Die aus diesen beiden Differentialgleichungen sich ergebenden Werte von $dt : d\tau$ sind konjugiert imaginär.

Es sei nun ein μ integrierender Faktor der Differentialgleichung (2), der natürlich im allgemeinen auch eine komplexe Funktion von t und τ sein wird.

Multipliziert man die linke Seite von (2) mit μ , so wird sie ein exaktes Differential, das mit $d\alpha$ bezeichnet sei, so dass also

$$(4) \quad d\alpha = \mu \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right)$$

ist.

(1) NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VIII); Tôhoku Math. Journal, Vol. 32 (1930) S. 219.

Nennt man die Funktion, die aus μ durch Vertauschen von i mit $-i$ hervorgeht, die zu μ konjugierte Funktion und bezeichnet man diese mit ν , so zeigt man leicht, dass ν ein integrierender Faktor von (3) ist: man erhält so entsprechend zu (4)

$$(5) \quad d\beta = \nu \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - i \Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right).$$

Aus (4) und (5) erhält man durch Integration zwei Gleichungen von der Form:

$$(6) \quad \varphi(t, \tau) = \alpha,$$

$$(7) \quad \psi(t, \tau) = \beta.$$

Dies sind die Gleichungen der Minimallinien, und zwar stellt (6) die eine, (7) die andere Schar derselben dar.

Nun beweisen wir den

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterkurven Minimallinien sind, ist, dass die Gleichungen

$$(\theta_t \theta_t) = 0; \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

identisch für alle Wertepaare t, τ erfüllt werden.,

Um die Minimallinien als Parameterkurven einzuführen, spaltet man die quadratische Differentialequation

$$(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0$$

in ihre Linearfaktoren und erhält so zwei lineare Differentialgleichungen, deren Integrationskonstanten α und β die Parameter der Minimallinien sind.

Die Transformationsgleichungen ergeben sich durch Auflösen der Integralgleichungen nach α und β in der Form

$$\varphi(t, \tau) = \alpha; \quad \psi(t, \tau) = \beta$$

Nun beweisen wir den

Satz²⁾: Bei jeder Abbildung zweier reziproker Kreisflächen gibt es

(2) Vergl. Tisser, Sur les cartes géographiques; Comtes Rendus 49 (1859) S. 673; und Nouvelles ann. de math., 2. Série (1878) t. 17.

ein System von zwei sich entsprechenden Kurvenscharen, die auf beiden Kreisflächen ein Orthogonalsystem bilden.

Beweis: Die Bedingung, dass zwei Fortschreitungsrichtungen auf der Kreisfläche S : $\frac{dt}{d\tau}$ und $\frac{dt'}{d\tau'}$ die abgekürzt mit m und m' bezeichnet werden mögen, aufeinander senkrecht stehen, ist

$$(8) \quad (\theta_i \theta_i) m m' + (\theta_i \theta_\tau)(m + m') + (\theta_\tau \theta_\tau) = 0.$$

Sollen die beiden entsprechenden Richtungen auf der Kreisfläche S_1 ebenfalls aufeinander senkrecht stehen, so muss

$$(9) \quad (\theta_i \theta_i)_1 m m' + (\theta_i \theta_\tau)_1 (m + m') + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 = 0.$$

sein.

Die Fortschreitungsrichtungen, die auf beiden Flächen orthogonal sind, müssen also den beiden Gleichungen (8) und (9) genügen, d. h. sie ergeben sich, wenn man (8) und (9) nach m und m' auflöst.

Die Elimination von m' aus (8) und (9) ergibt für m die Gleichung

$$(10) \quad \begin{vmatrix} (\theta_i \theta_i) m + (\theta_i \theta_\tau) & (\theta_i \theta_\tau) m + (\theta_\tau \theta_\tau) \\ (\theta_i \theta_i)_1 m + (\theta_i \theta_\tau)_1 & (\theta_i \theta_\tau)_1 m + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \end{vmatrix} = 0$$

Da (8) und (9) in m und m' symmetrisch sind, muss auch m' die Gleichung (10) genügen; d. h. m und m' sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung.

Ersetzt man m wieder durch $\frac{dt}{d\tau}$, so erhält man als Differentialgleichung der in Satz 1 genannten Kurven

$$(11) \quad \begin{vmatrix} (\theta_i \theta_i) dt + (\theta_i \theta_\tau) d\tau & (\theta_i \theta_\tau) dt + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau \\ (\theta_i \theta_i)_1 dt + (\theta_i \theta_\tau)_1 d\tau & (\theta_i \theta_\tau)_1 dt + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 d\tau \end{vmatrix} = 0,$$

Bemerkung: Ist

$$(\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau) = (\theta_i \theta_i)_1 : (\theta_i \theta_\tau)_1 : (\theta_\tau \theta_\tau)_1,$$

so entspricht jedem Orthogonalsystem der einen Fläche ein solches der andern; in diesem Falle nennt man die Abbildung konform.

(18) Nun ist

$$\hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_a \mathfrak{x}^a$$

eine normierte Kugel durch Kreis \mathfrak{K} im R_3 wobei

$$(1) \quad \hat{\mathfrak{y}}\hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b A^{ab} = 1$$

ist, so muss⁽¹⁾

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b T^{ab}$$

sein.

Betrachten wir k in dem Falle, dass $\cos^2 \varphi$ diesen Wert annähme, dann haben wir aus (7) und (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \rho_a \rho_b A^{ab} = 1, \\ \rho_a \rho_b T^{ab} = k. \end{cases}$$

Nun setzen wir

$$\rho_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad \rho_2 = \frac{x_2}{x_3}$$

in (3) ein, dann folgt aus (3):

$$(4) \quad \begin{cases} f = x_1^2 A^{11} + 2x_1 x_2 A^{12} + x_2^2 A^{22} - x_3^2 = 0, \\ \phi = x_1^2 T^{11} + 2x_1 x_2 T^{12} + x_2^2 T^{22} - k x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Dann wollen wir über die Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte (4), deren Determinanten nicht verschwinden, folgendes als bekannt voraussetzen.

Die Determinante des Kegelschnittbüschels

$$f + \lambda \phi = 0$$

wollen wir $\Delta(\lambda)$ nennen. Es ist also

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A^{11} + \lambda T^{11} & A^{12} + \lambda T^{12} & 0 \\ A^{12} + \lambda T^{12} & A^{22} + \lambda T^{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \lambda k) \end{vmatrix}.$$

Setzen wir diese gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

(1) Vergl. (9).

$$\lambda_1 = -\frac{1}{k}, \quad \lambda_2 = -\frac{A^{22}}{T^{22}}, \quad \lambda_3 = -\frac{A^{11}}{T^{11}}$$

sein mögen.

Es sind drei verschiedene Wurzeln vorhanden, also schneiden sich die Kegelschnitte in vier getrennten Punkten.

(19) In der BLASCHKE'schen Differential-Geometrie III gelangten wir durch die stereographische, bzw. isotrope Projektion zur MÖBIUS'schen und zur LAGUERRE'schen Geometrie der Ebene.

Beide Projektionen lassen sich ohne wesentliche Abänderung auf höhere Dimensionen übertragen.

Wir beginnen hier mit der Kugelgeometrie im R_n , die sich aus der Übertragung der stereographischen Projektion auf den $(n+1)$ -dimensionalen Raum ergibt.

Wir projizieren eine „Überkugel“, die in den $(n+2)$ homogenen Koordinaten $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ die Gleichung hat:

$$(1) \quad x_0^2 = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0.$$

Aus dem „Südpol“ $\{x_0=1, x_1=x_2=\dots=x_n=0; x_{n+1}=-1\}$ projizieren wir auf die „Grundüberebene“ $x_{n+1}=0$ eine Kugel.

Dann entsprechen den Punkten $x[x_0^2=0]$ der Überkugel (1) die Punkte der Überebene oder, wie wir auch sagen wollen, die Punkte des n -dimensionalen Raumes der Projektion $x_{n+1}=0$.

Hier gelten für die stereographische Projektion folgende Formeln:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0 = \rho \cdot \frac{1 + \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{2}, \\ x_1 = \rho \xi_0, \quad x_2 = \rho \xi_1, \quad \dots, \quad x_n = \rho \xi_{n-1}, \\ x_{n+1} = \rho \cdot \frac{1 - (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)}{2}, \end{cases}$$

die ermöglichen, aus den kartesischen koordinaten $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ des Punktes der Projektionsraumes die homogenen Koordinaten x_i des entsprechenden Punktes der Überkugel (1) zu ermitteln.

Wir werden die homogenen, an die Gleichung (1) gebundenen Größen

x_i auch als Koordinaten des Punktes der Projektion verwenden und sie dann als pentasphärische oder $(n+2)$ -Kugelkoordinaten bezeichnen.

Mit Hilfe der Formeln (2) bestätigt man leicht, dass durch die linearen Gleichungen

$$(3) \quad \eta\eta = -x_0x_0 + x_1x_1 + \dots + x_{n+1}x_{n+1} = 0$$

in den pentasphärischen Punktkoordinaten, bei denen die y_i der Ungleichung $\eta\eta > 0$ genügen, die Kugeln im Projektionsraum dargestellt werden.

Dabei rechnen wir die Ebenen, die sich für $x_i + x_{n+1} = 0$ ergeben, als „spezielle Kugeln mit unendlichem Radius“ dazu.

Wenn $\eta\eta = 0$ ist, schrumpft die Kugel auf einen Punkt zusammen, wenn aber $\eta\eta < 0$ ist, erhalten wir Gebilde ohne reelle Punkte, die wir nullteilige Kugeln nennen.

Fassen wir alle genannten Gebilde unter dem Begriff „Kugeln“ zusammen, so können wir somit unsere stereographische Projektion des $(n+1)$ -dimensionalen Raumes auch als eine Abbildung seiner Punkte η auffassen, oder als entsprechende Polarüberebenen (3) bezüglich der Fläche (1), oder als Gleichung $x_{n+1} = 0$ für die Kugel des Projektionsraumes und als Kugeln und Ebenen ausserhalb dieser Flächen.

Allgemein nennen wir y_i die Pentasphärischen Kugelkoordinaten.

Betrachten wir im $(n+1)$ -dimensionalen Raume die Gruppe der Projektions-Transformationen, die die Überkugel (1) festhalten, ausserdem die Gruppe der $(n+1)$ -dimensionalen hyperbolischen Bewegungen mit der Massfläche (1), so entspricht ihr eine Gruppe von Punkttransformationen des n -dimensionalen Projektionsraumes, welche Kugeln wieder in Kugeln überführt, und welche wir die Gruppe der Möbius'schen Kugeltransformationen des n -dimensionalen Raumes nennen wollen.

Die Geometrie dieser Gruppe wollen wir auch Inversions- oder Konformgeometrie des Raumes nennen.

Ähnlich dem entsprechenden Satz der Ebene im R_2 kann man auch den Satz beweisen, dass die Möbius'schen Transformationen die einzigen eindeutigen Punkttransformationen des Möbius'schen Raumes im R_n sind, welche Kugeln überführen.

Man geht durch die stereographische Projektion in den $(n+1)$ -dimensionalen Raum.

Darin sind dann solche Transformationen der Überkugel, welche die Schnittgebilde der Überebenen mit der Überkugel in ebensolche überführen.

Ordnen wir jedem Punktepaaar der Überkugel seine Verbindungsgerade zu, so induzieren die Punkttransformationen der Überkugel in dem Gebiet innerhalb der Kugel eindeutige Geradentransformationen, welche Überebenen wieder auf Überebenen abbilden.

Für den Winkel φ zweier Kugeln η und ξ gilt:

$$\cos \varphi = \frac{(\eta\xi)^2}{(\eta\eta)(\xi\xi)}.$$

Daraus ergeben sich dann auch die Bedingungen für Orthogonalität und Berührung von Kugeln im R_n .

Zu $(n+1)$ gegebenen linear unabhängigen Kugeln χ^a [$a=I, II, \dots, (n+1)$] gibt es immer eine gemeinsame senkrechte Kugel η , die wir definieren können durch

$$(\eta^*) = \chi^I, \chi^{II}, \dots, \chi^{(n+1)*},$$

wofür $*$ eine willkürliche Kugel eingesetzt werden kann.

Wir schreiben symbolisch:

$$\eta = | \chi^I, \chi^{II}, \dots, \chi^{(n+1)} |$$

und nennen η das vektorielle Produkt der $(n+1)$ - Kugeln χ^a .

Wenn u einer der Schnittpunkte der n Kugeln χ^a ist, so folgt:

$$uu = u\chi^a = 0.$$

Es sei u ein Schnittpunkt der χ^a [$a=I, II, \dots, n$]; dann ist die Determinante

$$u, \chi^I, \chi^{II}, \dots, \chi^{(n)*}, = 0$$

für jede Hilfskugel $*$.

Es ist u also eine Linearkombination der χ^a .

Wäre \mathfrak{B} ein weiterer Schnittpunkt der χ^a , so wäre $\mathfrak{B}\chi^a = 0$, also auch

$$\mathfrak{B}u=0.$$

Ein Kreis \mathfrak{K} kan als Schnitt der $(v-1)$ - Kugeln \mathfrak{K}^a [$a=I, II, \dots, (n-1)$] festgelegt werden.

Alle Kugeln \mathfrak{K} , die sich linear aus den \mathfrak{K}^a Kombinieren lassen, gehen durch denselben Kreis \mathfrak{K} .

Wir können zwei neue Kugeln

$$(4) \quad \mathfrak{K}^* = \sum_{\beta=1}^{n-1} c_{\beta}^* \mathfrak{K}^{\beta} \quad [a=I, II, \dots, (n-1)]$$

als Linearkombinationen der mit Koeffizienten C_{β}^* einführen und dann durch $\hat{\mathfrak{K}}$ unseren Kreis darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$\mathfrak{K}^a, \mathfrak{K}^b, z^a, \dots u.s.w. \quad [a=I, II, \dots, (n-1)],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl Kreise festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kreise abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (4), d.h. bei dem Übergang zu beliebigen andern Hilfskugeln der durch die Kreise gehenden Büschel.

Dabei werden wir für die verschiedenen Kreise Substitutionen (4) mit verschiedenen Koeffizientensystemen c_{β}^* haben.

Betrachten wir zunächst einen Kreis \mathfrak{K}^a und bilden das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (\mathfrak{K}^a \mathfrak{K}^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach (4) in folgender Weise substituiert:

$$\hat{A}^{ab} = c_{\beta}^a c_{\gamma}^b A^{r\delta} \quad [\hat{A}^{ab} = (\hat{\mathfrak{K}}^a \hat{\mathfrak{K}}^b)].$$

Hier sind allld Indizes von 1 bis $(n-1)$ enthalten, und es ist bei doppelt vorkommenden Indizes die rechte Seite zu addieren.

Für den zu unserem Kreis \mathfrak{K} gehörigen Tensor A^{ab} gilt die Symmetriebedingung

$$A^{ab} = A^{ba}$$

und dass sich ferner die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

$$\overset{*}{A} = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

substituiert:

Wollen wir nun einen eigentlichen reellen Kreis haben, so müssen wir die Determinante $A > 0$ voraussetzen.

Wir betrachten zwei Kreise \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Kugelpaare x^{α} und \tilde{x}^{λ} [$\alpha, \lambda = I, II, \dots, (n-1)$] dargestellt werden. Wir definieren zu (5) analog $\tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^{\lambda} \tilde{x}^{\mu})$, wobei $\tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$ ist, und setzen $\tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$ voraus.

Dann haben wir für $\tilde{\mathfrak{K}}$ die Büscheltransformationen

$$(5') \quad \tilde{x}^{\lambda} = \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} \tilde{x}^{\mu}$$

zu berücksichtigen. Die $\tilde{c}_{\mu}^{\lambda}$ in (5') sind aber von den c_{β}^{α} in (4) völlig unabhängige neue Grössen.

In

$$g^{\alpha\lambda} = (x^{\alpha} x^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen „gemischten“ Tensor, der sich nach

$$\overset{*}{g}^{\alpha\lambda} = c_{\beta}^{\alpha} \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} g^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$|x^I, x^{II}, \dots, x^{(n-1)}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}| \equiv 0$$

ist, in die lineare Beziehung der Form

$$(6) \quad \sigma_{\alpha} x^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (6) ist aber die, dass es eine Kugel $\mathfrak{z} = \sigma_{\alpha} x^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$ gibt, auf der $(n-1)$ - Kreise liegen.

Wir bilden nun den in α und β symmetrischen Tensor

$$T^{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\lambda\mu} \overset{*}{g}^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} = g_{\mu}^{\alpha} g^{\beta\mu}.$$

Isogonale Kreise heissen solche Kreise, bei denen alle Kugeln durch einen Kreis einen gleichen Winkel mit einem andern bilden.

Ist $\hat{\eta} = \rho_a \tilde{x}^a$ eine normierte Kugel durch \mathfrak{R} , wobei

$$\hat{\eta}\hat{\eta} = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b A^{ab} = 1$$

ist, so muss

$$\cos^2 \varphi = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b T^{ab}$$

unabhängig von den ρ_a sein, wobei φ der Winkel zwischen dem Kreise und der Kugel ist

Dass ist nur möglich für

$$T^{ab} \text{ prop. } A^{ab}.$$

Ist $\tilde{T}^{\lambda\mu} = A_{ab} \delta^{a\lambda} \delta^{b\mu}$ der T^{ab} entsprechende Tensor der zweiten Art, so muss wegen der geforderten Reziprozität der Beziehung zwischen den beiden Kreisen auch $\tilde{T}^{\lambda\mu}$ prop. $\tilde{A}^{\lambda\mu}$ sein.

Aus $T_a^a = \tilde{T}_\lambda^\lambda$ folgt dann, dass die beiden Proportionalitätsfaktoren, also die beiden Winkelwerte gleich sind.

Aus diesen Bedingungen folgt speziell auch

$$H^2 - K = 0.$$

(20) Wir betrachten zwei Geraden g und \tilde{g} im Raume R_3 , die durch die beiden Geradenpaare x^a und \tilde{x}^λ [$a, \lambda = I, II$] dargestellt⁽¹⁾ sind, wobei

$$(x^a x^a) = 0 \text{ und } (\tilde{x}^\lambda \tilde{x}^\lambda) = 0$$

sind.

Wir definieren

$$A^{ab} = (x^a x^b), \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^\lambda \tilde{x}^\mu),$$

wobei

$$A^{ab} = A^{ba}, \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

ist, und setzen

$$A = |A^{ab}| > 0, \quad \tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}|$$

(1) THOMSEN, G.; Über Kreisscharen und Kurven in der Ebene und über Kreisscharen und Kurven im Raum; Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Universität, IV Bd. (1925) S. 117.

voraus.

Dann haben wir für g, \bar{g} die Büscheltransformationen

$$(1) \quad \begin{cases} \xi^{*a} = \sum_{\beta=1}^{\text{II}} c_{\beta}^a \xi^{\beta} & [a=I, \text{II}], \\ \eta^{\lambda} = \sum_{\mu=1}^{\text{II}} \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} \tilde{\xi}^{\mu} & [\lambda=I, \text{II}] \end{cases}$$

zu berücksichtigen, wobei c_{β}^a , c_{μ}^{λ} völlig unabhängige Koeffizienten sind, deren Determinanten

$$|c_{\beta}^a| \neq 0 \quad \text{und} \quad |c_{\mu}^{\lambda}| \neq 0$$

sein müssen.

In

$$s^{a\lambda} = (\xi^a \tilde{\xi}^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen nämlich einen "gemischten" Tensor, der sich nach

$$(2) \quad s^{a\lambda} = c_{\beta}^a \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} s^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir betrachten nun den Fall, dass die Matrix

$$(3) \quad | \xi^I, \xi^{\text{II}}, \tilde{\xi}^I, \tilde{\xi}^{\text{II}} | \equiv 0$$

ist, wobei eine lineare Beziehung der Form

$$(3') \quad \sigma_a \xi^a = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{\xi}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (3') ist aber die, dass es einen Punkt

$$\mathfrak{p} = \sigma_a \xi^a = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{\xi}^{\lambda}$$

gibt, durch beide Geraden verlaufen.

Gilt (3) nicht, so sind die vier Geraden linear abhängig.

Wir bilden nun den in α und β symmetrischen Tensor (4)

$$(4) \quad T^{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\lambda\mu} s^{a\lambda} s^{\beta\mu} = s^a \cdot_{\mu} s^{\beta\mu}$$

Statt \tilde{A}^{λ} , $s^{a\lambda}$ führen wir nun $T^{\alpha\beta}$ neben $A^{\alpha\beta}$ ein; somit haben wir

vier Größen weniger. Da aber in den Transformationsformeln von $A^{\alpha\beta}$ und $T^{\alpha\beta}$ die c_μ^λ garnicht vorkommen, entspricht dieses Nichtvorhandensein gerade der Elimination der vier Größen \tilde{C}_μ^λ .

Es bleibt noch die Aufgabe, die Invarianten der gleichartigen Tensoren $A^{\alpha\beta}$ und $T^{\alpha\beta}$ zu bestimmen.

Das entspricht aber gerade dem Problem der Invariantenbestimmung zweier quadratischer Formen im Gebiet zweier Variabler, wie sie in der Flächentheorie vorkommt.

Der GAUSS'schen und mittlereren Krümmung entsprechend haben wir die beiden Invarianten

$$(5) \quad K = \frac{T}{A}, \quad H = \frac{1}{2} T_\alpha^\alpha,$$

wo T die Determinante $|T^{\alpha\beta}|$ ist.

Aus (4) ergibt sich

$$(6) \quad T = \frac{s^2}{\tilde{A}},$$

wobei

$$s = |s^{\alpha\lambda}|$$

ist.

Somit hat man auch

$$(7) \quad K = \frac{s'}{A \cdot \tilde{A}} \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2} s^{\alpha\lambda} s_{\alpha\lambda}$$

Aus (7) ersieht man, dass die Invarianten in den Tensoren beider Büschel symmetrisch sind trotz der Bevorzugung des ersten Büschels durch Einführung von $T^{\alpha\beta}$ bei ihrer Herleitung.

Für zwei verschiedene reelle Punkte ξ und $\bar{\xi}$ ist immer $(\xi\xi) \neq 0$, und wenn $(\xi\bar{\xi})$ in den kartesischen Koordinaten $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ist, ergibt sich:

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2.$$

Nehmen wir auf einer Kugel \mathfrak{g} im R_3 drei Punkte ξ^* [$d=I, II, III$] und auf einer weiteren Kugel \mathfrak{g}^* ebenfalls drei Punkte ξ^* an, so gibt

es genau vier *Möbius'sche* Transformationen des Raumes, welche die Figur $\{3\xi^*\}$ in die Figur $\{3^*\xi^{**}\}$ überführen.

Wir können zunächst in ähnlicher Weise 3 in 3^* überführen.

Dann gehen dabei die ξ^* in drei Punkte $\bar{\xi}^*$ auf 3^* über..

Nun kann man aber auf zwei verschiedene Weisen wegen der Kreisverwandtschaft auf 3^* die ξ^* in die ξ^{**} überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem eben Ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen; denn die Figur $\{3^*\xi^{**}\}$ kann man nun durch vier Transformationen in sich überführen.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Kugel 3^* zwei Kreisverwandtschaften, einmal die Identität des Raumes dann die Inversion an 3^* , die alle Punkte von 3^* unverändert lässt.

Dann gibt es die Inversion auf 3^* die den Kreis durch die Punkte ξ^{**} auf 3 in allen Punkten unverändert lässt, und zu dieser gibt es zwei Transformationen im Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an 3^* ausführt.

Da die Figur $\{3^*\xi^{**}\}$ von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von Möbius im Raum 10-gliedrig (Gruppe M_{10}).

(21) Das Quadrat der Masszahl der Länge eines Linienelementes des Flächenstückes C sei durch die Gleichung

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda(t, \tau)} [(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2]$$

dargestellt. Die Funktionen $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ und $\lambda(t, \tau)$ sind eindeutig und stetig. Die Möglichkeit der konformen Abbildung wird dargetan sein, sobald es gelingt, zwei reelle, mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung eindeutige und stetige Funktionen $u(t, \tau)$ und $v(t, \tau)$ der Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} [(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2] = du^2 + dv^2$$

gemäss zu bestimmen, in welcher der Multiplikator λ eine wesentlich

positive, eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Argumente t und τ bezeichnet.

Für die Gleichung (1) kann man auch setzen

$$(2) \quad \mu \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right) \\ = du + i dv, \quad (i = \sqrt{-1})$$

worin der Faktor μ eine von Null verschiedene, eindeutige und stetige komplexe Funktion der reellen Argumente t und τ bezeichnet.

Aus der Gleichung (2) werden die weiteren Relationen

$$\mu \sqrt{(\theta_t \theta_t)} = \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \mu \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + i \frac{\partial v}{\partial \tau}, \\ (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + i \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = \left((\theta_t \theta_\tau) + i \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

abgeleitet.

Die zuletzt angegebene Beziehung führt zu den beiden Gleichungen⁽¹⁾

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_t \theta_t) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}. \end{cases}$$

Es wird nun zunächst die zusätzliche Voraussetzung gemacht, dass die Funktionen $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$ und $(\theta_\tau \theta_\tau)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung sind, die ihrerseits der HÖLDER'schen Bedingung genügen.

Aus den Formeln (3) ergibt sich, wenn vorausgesetzt wird, dass die Funktion u auch noch stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat, die partielle Differentialgleichung

(1) Vergl. Encyklopädie der Math. Wiss., Leipzig III.

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\theta_t \theta_\tau) \frac{du}{d\tau} - (\theta_\tau \theta_t) \frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_t \theta_t) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}} \right) = 0.$$

Ist insbesondere die Grösse $(\theta_t \theta_\tau)$ gleich θ , d. h. stellen die Kurvenscharen auf der Fläche, welche entsprechend durch die Beziehung $t = \text{const.}$ und die Beziehung $\tau = \text{const.}$ charakterisiert werden, zwei orthogonale Kurvenscharen dar, so gehen die Differentialgleichungen (3) und (4) über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} \sqrt{(\theta_t \theta_t)} &= - \frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} \sqrt{(\theta_t \theta_t)} &= \frac{\partial u}{\partial t} \sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{(\theta_t \theta_t)}} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t)}{(\theta_\tau \theta_\tau)}} \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0^{1)}, \end{aligned}$$

(22) Nehmen wir die Koordinaten eines eigentlichen Punktes $x^a [a = \text{I, II, III}]$ im R, als Funktionen eines reellen Parameters t an :

$$(1) \quad \rho x^a(t) = a^a + 3b^a t + 3c^a t^2 + d^a t^3, \quad [a = \text{I, II, III}],$$

so ist dadurch im R eine Kurve bestimmt, wobei ρ ein beliebiger Faktor ist.

Die Funktionen $x^a(t)$ wollen wir als stetige und differenzierbare Funktionen ansehen.

Für die normierten Koordinaten gilt dann : $(\dot{x}_t^t) = 1$, und $(\dot{x}_t^a) = 0$ ist identisch in t , wobei wir die Ableitung durch Punkte bezeichnen. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (a^2) &= 3(ab) = (d^2) = 3(cd) \\ &= 9(b^1) + 6(ae) = 9(c^1) + 6(bd) \\ &= (ad) + 9(bc) = 0. \end{aligned}$$

Aus (1) schreiben wir homogen :

- (1) LICHTENSTEIN, L: Beweis des Satzes, dass jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann; Akademie der Wissenschaften, Berlin (1912) S. 6.

$$\rho \xi^a = a^a \mu^3 + 3b^a \mu^2 \lambda^2 + 3c^a \mu \lambda^3 + d^a \lambda^4 = f_a(\lambda, \mu).$$

Die erste Osculante im Punkte λ_1, μ_1 wird dargestellt durch:

$$\rho \xi^a = \frac{1}{3} \left(-\frac{\partial f_a}{\partial \mu} \mu_1 + \frac{\partial f_a}{\partial \lambda} \lambda_1 \right),$$

oder

$$\rho \xi^a = (a^a + b^a \lambda_1) + 2(b^a + c^a \lambda_1) \lambda + (c^a + d^a \lambda_1) \lambda^2.$$

Ist λ_1 der Parameter eines Wendepunktes, so folgt für λ_1 die Gleichung:

$$(2) \quad \phi(\lambda_1) \equiv \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \lambda_1 & b_1 + c_1 \lambda_1 & c_1 + d_1 \lambda_1 \\ a_2 + b_2 \lambda_1 & b_2 + c_2 \lambda_1 & c_2 + d_2 \lambda_1 \\ a_3 + b_3 \lambda_1 & b_3 + c_3 \lambda_1 & c_3 + d_3 \lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ_2 und λ die übrigen Wurzeln der Gleichung (2), so folgt

$$\phi(\lambda_2) = 0 \quad \phi(\lambda) = 0.$$

Liegen zwei benachbarte Punkte $\xi^a(t)$ und $\xi^a + d\xi^a$ auf einer Kugel η , denn gilt:

$$(\eta \xi^a) = 0, \quad \left(\eta \frac{d\xi^a}{dt} \right) = 0,$$

hieraus folgt:

$$(a^a \eta) + 3(b^a \eta)t + 3(c^a \eta)t' + (d^a \eta)t'' = 0,$$

$$(b^a \eta) + 2(c^a \eta)t + (d^a \eta)t' = 0.$$

Fallen zwei Punkte

$$\xi^a(t) = a^a + 3b^a t + 3c^a t' + d^a t'',$$

und

$$\eta^a(t) = A^a + 3B^a t + 3C^a t' + D^a t''$$

zusammen, dann ergibt sich:

$$(\xi^a \xi^a) = 0, \quad (\eta^a \eta^a) = 0, \quad (\xi^a \eta^a) = 0,$$

d. h.

$$\sum\{(a^* - A^*) + 3(b^* - B^*)t + 3(c^* - C^*)t^2 + (d^* - D^*)t^3\}^2 = 0,$$

welches unsere gesuchte Bedingung ist.

(23) Im folgenden werden wir den Begriff der Translationsfläche im R_3 erörtern.

Werden zwei gedachte Kurven, etwa die durch die Gleichungen

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1^*(t_1), \quad [a = \text{I, II, III}]$$

mit dem Parameter t_1 dargestellt, ohne Änderung ihrer Stellung im Raume, also mittels Schiebung oder Translation stetig in neue Lagen übergeführt; so erzeugt sie eine Schiebungs- oder Translationsfläche.

Wollen wir den Punkten \mathfrak{x} der Kurve (1) stetige Schiebungen erteilen, so haben wir zu ihren Koordinaten Funktionen einer Veränderlichen t_2 zu addieren, etwa die Funktionen $\mathfrak{x}_2^*[a = \text{I, II, III}]$, so dass die Kurve (1) die Translationsfläche erzeugt.

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1^*(t_1) + \mathfrak{y}_2^*(t_2), \quad [d = \text{I, II, III}].$$

Auf dieser Fläche sind t_1 und t_2 GAUSS'sche Parameter; sowohl die Parameterkurven $t_1 = \text{const.}$, als auch die Parameterkurven $t_2 = \text{const.}$ sind einander kongruent und gleichgestellt.

Die Tangenten der durch die Punkte einer Kurve $t_2 = \text{const.}$ gehenden ∞^1 Kurven $t_1 = \text{const.}$ haben den Richtungscosinus proportional den Grössen :

$$\frac{d\mathfrak{x}_1^*(t_1)}{dt_1},$$

die von t_2 frei sind, d. h. alle jene ∞^1 Tangenten sind einander parallel und bilden daher einen Zylinder, der die Translationsfläche (2) längs der betrachteten Kurve $t_2 = \text{const.}$ umhüllt.

Die drei Koordinaten in (2) genügen der partiellen Differentialgleichung :

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t_1 \partial t_2} = 0,$$

und damit der Bedingung $M=0$, d. h. die beiden Scharen erzeugenden Kurven sind einander konjugiert.

Die Translationsfläche (2) ist unter den Bedingungen⁽¹⁾

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial t_2} = 0$$

eine Minimalfläche, und umgekehrt lassen sich auch alle Minimalflächen auf diese Weise ausdrücken. Alsdann sind aber auch

$$\xi = e^{i\alpha} \xi_1^{\alpha} + e^{-i\alpha} \xi_2^{\alpha}$$

die Koordinaten einer durch stetige Biegung aus (2) hervorgehenden Gruppe assoziierter Minimalflächen mit dem Biegungsparameter, und hierdurch sind zugleich alle zu der gegebenen Fläche (2) isometrischen Minimalflächen gegeben.

(24) Wir haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\alpha} \hat{\rho}_{\beta} A^{\alpha\beta} &= 1, \\ \cos^2 \varphi &= \hat{\rho}_{\alpha} \hat{\rho}_{\beta} T^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

aus denen folgt:

$$\cos^2 \varphi = \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2},$$

in nicht homogener Schreibweise

$$A(\lambda) \equiv \cos^2 \varphi = \frac{T^{11} \lambda^2 + 2T^{12} \lambda + T^{22}}{A^{11} \lambda^2 + 2A^{12} \lambda + A^{22}}.$$

Wenn $A(\lambda)$ ein Maximum oder Minimum ist, folgt

$$\frac{d}{d\lambda} A(\lambda) = 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{vmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ 1 & -\lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} &= \lambda^2 (A^{12} T^{11} - A^{11} T^{12}) + \lambda (A^{22} T^{11} - A^{11} T^{22}) \\ &\quad + (A^{22} T^{12} - A^{12} T^{22}) \\ &\equiv \theta \lambda^2 + Z \lambda - H' = 0. \end{aligned}$$

(1) Vergl. etwa KNOBLAUCH, J: Grundlage der Differentialgeometrie; Leipzig und Berlin (1913) S. 161.

In abgekürzter Schreibung :

$$(2) \quad \begin{aligned} H &\equiv A^{12}T^{12} - A^{22}T^{11}, & \theta &\equiv A^{12}T^{11} - A^{11}T^{12}, \\ H' &\equiv A^{11}T^{22} - A^{22}T^{12}, & \theta' &\equiv A^{12}T^{12} - A^{11}T^{22}, \\ Z &\equiv \theta' - H = A^{22}T^{11} - A^{11}T^{22}, \end{aligned}$$

d.h.

$$H', Z, -\theta \equiv \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \end{vmatrix}.$$

(1) gibt die beiden Tangenten-Richtungen μ_1, μ_2 an, in welche die äussersten Werte der quadratischen Form $\cos^2\varphi$ fallen.

Sie stehen, da gemäss (2)

$$A^{11}H' + A^{12}Z - A^{22}\theta \equiv 0$$

wird, aufeinander senkrecht, und zwar ist auf Grund von

$$\frac{d^2A}{d\lambda^2} = 2\theta\lambda + Z$$

die Richtung μ_1 des Maximums A_a bzw. die Richtung μ_2 des Minimums A_i von $\cos^2\varphi$ bestimmt durch

$$\mu_1 = -\frac{D_A - Z}{2\theta} \quad \text{bzw.} \quad \mu_2 = -\frac{D_A + Z}{2\theta},$$

wenn zur Abkürzung

$$D_A \equiv \sqrt{Z^2 + 4\theta H'}$$

gesetzt wird. Im Falle des Maximums bzw. Minimums ist

$$A(\lambda) = -\frac{T^{11}\lambda + T^{12}}{A^{11}\lambda + A^{12}}.$$

(25) Im folgenden möchte ich eine Theorie zweiparametrischen Kreisscharen im konformen Raume R_n angeben.

Ist eine Kreisschar im konformen Raume vorgelegt, dann gibt es ein Paar Örter, den Brennpunkt der Kreise.

Diese Örter sind je eine Fläche der zweiparametrischen.

Sind die Gleichungen eines Paares von Örtern (ein Paar von Flächen):

$$(1) \quad (xx) = x_0^2(u, v) + x_1^2(u, v) + \dots + x_n^2(u, v) = 0,$$

$$(2) \quad (yy) = y_0^2(u, v) + y_1^2(u, v) + \dots + y_n^2(u, v) = 0,$$

dann kann man die Gleichung der Kreisscharen als

$$(3) \quad (xy) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 1$$

setzen, wobei u, v die Parameter bedeuten.

Aus (3) folgt:

$$\sum dx_i \cdot y_i + \sum x_i \cdot dy_i = 0.$$

Nun kann man setzen:

$$\sum dx_i \cdot y_i = \text{const. } (=k);$$

denn wenn wir setzen

$$\bar{x} = \rho x, \quad \bar{y} = \rho^{-1} y$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sum \bar{dx}_i \cdot \bar{y}_i &= \sum (\rho \cdot dx_i + c \rho \cdot x_i) (\rho^{-1} y_i) \\ &= \sum dx_i \cdot y_i + \sum d\rho \cdot \rho^{-1} \cdot x_i y_i. \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\sum dx_i \cdot y_i + d\rho \cdot \rho^{-1} = \text{const. } (=k),$$

d.h.

$$\frac{d\rho}{\rho} = k - \sum dx_i \cdot y_i, \quad \text{i.e. } \rho = \exp.(-\sum dx_i \cdot y_i)$$

Aus

$$\sum dx_i \cdot y_i = k$$

folgt

$$\sum d^2 x_i \cdot y_i + \sum dx_i \cdot dy_i = 0.$$

Wenn zwei Punkte $(xx)=0$, $(yy)=0$ auf einer Fläche liegen, so können wir drei quadratische Differentialformen bestimmen:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum dx_i \cdot dy_i = g_{ik} du^i \delta u^k, \\ \sum (dx_i)^2 = g_{ik} du^i du^k, \\ \sum (dy_i)^2 = g_{ik} \delta u^i \delta u^k, \end{cases}$$

wobei du^i , δu^i zwei gegebene Fortschreitungsrichtungen bedeuten.

Ihr Winkel θ wird gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{(g_{ik} du^i \delta u^k)^2}{(g_{ik} du^i du^k) (g_{ik} \delta u^i \delta u^k)},$$

also in einer u - und in anderer \bar{u} - Mannigfaltigkeit wird bei $u \rightarrow \bar{u}$

$$\cos \theta = \cos \bar{\theta},$$

dann und nur dann bleiben, wenn

$$\frac{(\bar{g}_{ik} du^i \delta u^k)^2}{(\bar{g}_{ik} du^i du^k) (\bar{g}_{ik} \delta u^i \delta u^k)} \equiv \frac{(g_{ik} du^i \delta u^k)^2}{(g_{ik} du^i du^k) (g_{ik} \delta u^i \delta u^k)}$$

in allen Differentialen du^i und δu^i identisch ist.

Hieraus erhält man leicht die Proportionalität:

$$(5) \quad \bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \lambda = \lambda(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Wir setzen zunächst $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$ und bilden für diese Tensor λg_{ik} die Drei-Indizes-Symbole Γ' und den Krümmungstensor $R'_{ik, lm}$.

Es wird:

$$(6) \quad g' = \lambda^i g, \quad g'^{ik} = \frac{1}{\lambda} g^{ik},$$

$$(7) \quad I''_{a, ik} = \lambda \Gamma_{a, ik} + \frac{1}{2} \left(g_{ia} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} + g_{ka} \frac{\partial \lambda}{\partial u_i} - g_{ik} \frac{\partial \lambda}{\partial u_a} \right).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(8) \quad \mu_i = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u_i},$$

so ist

$$(9) \quad I''^{rr}_{ik} = \Gamma^{rr}_{ik} + \frac{1}{2} (\partial_i^r \mu_k + \partial_k^r \mu_i - g^{ra} g_{ik} \mu_a).$$

Zur Berechnung von $R'_{ik, lm}$ empfiehlt es sich, weitere Abkürzungen zu verwenden.

Zunächst ist

$$(10) \quad g^{ra} \mu_a = \mu^r, \quad g^{ik} \mu_i \mu_k = \mu_s \mu^s;$$

dann bilden wir von dem kovarianren Vektor μ_i die kovariante Ableitung.

Dies gibt den symmetrischen Tensor

$$(11) \quad \phi_{ik} = -\frac{\partial \mu_i}{\partial u_k} - \Gamma_{ik}^s \mu_s.$$

Schliesslich setzen wir noch:

$$(12) \quad \varphi_{ik} = \mu_i \mu_k - \frac{1}{2} g_{ik} (\mu_s \mu^s).$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke berechnet man dann⁽¹⁾

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} R'_{ik, lm} = R_{ik, lm} - \frac{1}{2} [g_{il} \phi_{km} + g_{km} \phi_{il} - g_{im} \phi_{kl} \\ - g_{kl} \phi_{im}] + \frac{1}{4} [g_{il} \varphi_{km} + g_{km} \varphi_{il} - g_{im} \varphi_{kl} - g_{kl} \varphi_{im}]. \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $n > 2$ voraus und bilden noch:

$$(14) \quad R'_{km} = g'^{il} R'_{ik, lm} = \frac{1}{\lambda} g'^{il} R'_{ik, lm}$$

und

$$(15) \quad R' = g'^{km} R'_{km} = \frac{1}{\lambda} g'^{km} R'_{km}.$$

Es wird aus (13):

$$(16) \quad \begin{aligned} R'_{km} = R_{km} - \frac{1}{2} [(n-2) \phi_{km} + g_{km} \phi] \\ + \frac{1}{4} [(n-2) \varphi_{km} + g_{km} \varphi] \end{aligned}$$

$$(17) \quad R' = \frac{1}{\lambda} [R - (n-1) \phi + \frac{1}{2} (n-1) \varphi].$$

Dabei ist nach (11) und (12) gesetzt:

(1) WEITZENBÖCK; Invariantentheorie (1923), S. 299.

$$(18) \quad \phi = g^{ik} \phi_{ik} = g^{ik} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial u_k} - \Gamma_{ik}^n \mu_n \right)$$

$$(19) \quad \varphi = g^{ik} \varphi_{ik} = g^{ik} \mu_i \mu_k - \frac{1}{2} g^{ik} g_{ik} (\mu_i \mu^i) = -\frac{n-2}{2} (\mu_i \mu^i).$$

In $R'_{ik, lm}$, R'_{km} , R' und g'_{ik} sind λ , μ_i und $\frac{\partial \mu_i}{\partial u_k}$ enthalten.

Es ist nun möglich, diese Funktionen aus den Gleichungen für $R'_{ik, lm}$, R'_{km} , R' und g'_{ik} zu eliminieren.

Hierzu bilden wir nach (16) die Ausdrücke:

$$(20) \quad [g_{ik} R'_{lm}] = g_{il} R'_{km} + g_{km} R'_{il} - g_{im} R'_{kl} - g_{kl} R'_{im}.$$

Wir erhalten:

$$(21) \quad [g_{ik} g_{lm}] = 2(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl})$$

$$(22) \quad \frac{1}{\lambda} [g'_{ik} g'_{lm}] = [g_{ik} g_{lm}] - \frac{n-2}{2} [g_{ik} \phi_{lm}] + \frac{n-2}{4} [g_{ik} g_{lm}] \\ - (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \left(\phi - \frac{1}{2} \varphi \right).$$

Subtrahieren wir hiervon die mit $(n-2)$ multiplizierten Gleichungen (13), so fallen die Ausdrücke

$$[g_{ik} \phi_{lm}]$$

und

$$[g_{ik} \varphi_{lm}]$$

weg, und wir haben:

$$(23) \quad \frac{1}{\lambda} \{ [g'_{ik} R'_{lm}] - (n-2) R'_{ik, lm} \} \\ = ([g_{ik} R_{lm}] - (n-2) R_{ik, lm}) - \\ - (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \left(\phi - \frac{1}{2} \varphi \right).$$

Hier lässt sich

$$\phi - \frac{1}{2} \varphi$$

noch mit Hilfe von (17) eliminieren.

Es wird :

$$(24) \quad \overset{*}{R}_{ik,lm} = \lambda R_{ik,lm},$$

wobei

$$(25) \quad \overset{*}{R}_{ik,lm} = (n-2)R_{ik,lm} - [g_{il}R_{km} + g_{km}R_{li} - g_{lm}R_{ki} - g_{kl}R_{im}] \\ + \frac{1}{n-1}(g_{il}g_{km} - g_{lm}g_{kl})R$$

ist.

Aus (24) und $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$ kann schliesslich noch λ eliminiert werden :

$$(26) \quad \overset{*}{R}'_{ok,lm} = g'^{is} \overset{*}{R}'_{sk,lm} = \overset{*}{R}'_{ok,lm}$$

und dies gibt nach (25) den WEYL'schen Tensor⁽²⁾ :

$$\overset{*}{R}'_{ok,lm} = (n-2)R'_{ok,lm} - [\delta'_{il}R'_{km} + g_{km}R'_i{}^l - \delta'_m R'_{kl} - g_{kl}R'_m{}^i] \\ + \frac{1}{n-1}(\delta'_{il}g_{km} - \delta'_m g_{kl})R$$

(26) Die Steifenkreisfläche der Kreisfläche (α) in einem nicht singulären Kreise (ξ^I, ξ^{II}), wo also $-\frac{\partial \xi^I}{\partial t}$ und $-\frac{\partial \xi^{II}}{\partial t}$ nicht gleichzeitig Null sind, hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi^I - \xi^I & \xi^{II} - \xi^{II} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} \end{vmatrix} = 0;$$

und dies ist dann, wenn der Kreis $\{\xi^I, \xi^{II}\}$ der Enveloppe angehört, auch die Gleichung der Streifenkreisfläche an die Einfüllende im Kreise $\{\xi^I, \xi^{II}\}$.

Die Gleichung dieser Streifenkreisfläche ist zwar zunächst in der Form anzusetzen :

$$\begin{vmatrix} \xi^I - \xi^I & \xi^{II} - \xi^{II} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial t} + \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} + \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{vmatrix} = 0,$$

wo

(2) l. c. (1), S. 342, Tohoku Math. J., im Druck.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(x^I, x^{II})}{\partial(t, \alpha)} \right)}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial(x^I, x^{II})}{\partial(t, \alpha)} \right)}$$

gilt, doch ist wegen der Beziehung :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^I}{\partial t} - \frac{\partial x^{II}}{\partial \alpha} - \frac{\partial x^I}{\partial \alpha} - \frac{\partial x^{II}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial x^I}{\partial t} : \frac{\partial x^{II}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial x^I}{\partial t} + \frac{\partial x^I}{\partial \alpha} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) : \\ &\quad \left(\frac{\partial x^{II}}{\partial t} + \frac{\partial x^{II}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right); \end{aligned}$$

und somit verlaufen die in einem gemeinsamen Kreise der Kreisfläche (α) und der Enveloppe verzeichneten Streifenflächen in gleicher Richtung, d.h. die Enveloppe hat dort, wo sie die Kreisfläche (α) erreicht, einen Streifen mit ihr gemein.—Wenn aber der Kreis auf der Kreisfläche (α), durch welchen die Einhüllende hindurchgeht, ein singularer Punkt der Systemkreisfläche ist, so brauchen die beiden Kreisflächen keinen gemeinsamen Streifen zu besitzen.

(27) In den Parametern t, τ lautet die Differentialgleichung der Minimallinien :

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

Durch jeden Flächenpunkt gehen nach (I) zwei Minimallinien; dieselben sind stets imaginär, da die Diskriminante von (I)

$$\Delta^2 = (\theta_t \theta_t) - (\theta_t \theta_\tau)^2$$

stets positiv ist.

Durch Spaltung von (I) in zwei Linearfaktoren erhält man :

$$(2) \quad \sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau = 0,$$

$$(3) \quad \sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - i\Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau = 0,$$

wie in der elementaren Differentialgeometrie.

Die aus diesen beiden Differentialgleichungen sich ergebenden Werte von $dt: d\tau$ sind konjugiert imaginär.

Es sei nun ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (2), der natürlich im allgemeinen auch eine komplexe Funktion von t und τ sein wird.

Multipliziert man die linke Seite von (2) mit μ , so wird sie ein exaktes Differential, das mit da bezeichnet wird, so dass also

$$(4) \quad da = \mu \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i \Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right)$$

ist.

Nennt man die Funktion, die aus μ durch Vertauschen von i mit $-i$ hervorgeht, die zu μ konjugierte Funktion, und bezeichnet man diese mit ν , so zeigt man leicht, dass ν ein integrierender Faktor von (3) ist.

Man erhält so entsprechend zu (4)

$$(5) \quad d\beta = \nu \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - i \Delta}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right).$$

Aus (4) und (5) erhält man durch Integration zwei Gleichung:

$$(6) \quad \varphi(t, \tau) = \alpha,$$

$$(7) \quad \psi(t, \tau) = \beta.$$

Dies sind die Gleichungen der Minimallinien, und zwar stellt (6) (7) die eine, (7) die andere Schar derselben dar.

Das Linienelement ds der Fläche erhält nun eine besonders einfache Gestalt, wenn man mit Hilfe von (6) und (7) statt der willkürlichen Parameter t und τ die Größen α und β als neue Parameter einführt.

Multiplizieren wir nämlich (4) und (5) und setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{\mu\nu} = \bar{\lambda},$$

und

$$\bar{\lambda}\lambda = A^2,$$

so erhalten wir¹⁾

$$ds^2 = A^2 dd\beta.$$

Hierbei sind A^2 noch die Parameter t, τ wegen (6) und (7) durch α, β und λ zu ersetzen.

Man sieht, dass für $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ beidemal $ds = 0$, also die Differentiale Gleichung (2) der Minimallinien erfüllt wird, man nennt daher α und β die Parameter der Minimallinien wie in der elementaren Differentialgeometrie.

(28) Es seien durch

$$(1) \quad x_\alpha = x_\alpha(t), \quad [\alpha = \text{I, II, III}]$$

Kurven auf der Fläche

$$(2) \quad y_i = y_i(x_1, x_2) \quad [i = \text{I, II, III}]$$

gegeben. Von den $x_\alpha(t)$ ist dabei angenommen, dass sie stetig und mindestens einmal stetig differenzierbar sind.

Unter diesen Annahmen erhält man durch Einsetzen von (1) in (2)

$$y_i = y_i(x_1(t), x_2(t)) = z_i(t),$$

also in der Tat eine Kurve in Parameterdarstellung.

Für die Minimallinien ergibt sich:

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

für den Winkel θ der Parameterlinien in einem Punkt $P(t, \tau)$

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)}}.$$

Wir setzen $(\theta_i \theta_i)$ und $(\theta_\tau \theta_\tau)$ stets positiv voraus. Quadriert man (4), so ergibt sich:

$$\cos^2 \theta = \frac{(\theta_i \theta_\tau)^2}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)} \leq 1$$

oder

(1) Vergl. Encyklopädie der Wiss. III D 3.

$$(\theta\theta) = (\theta_i\theta_i)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_i\theta_\tau)^2 \geq 0.$$

Dabei ist $(\theta\theta)$ die Diskriminante der quadratischen Form (3),

Es ist

$$(5) \quad \frac{1}{(\theta_i\theta_i)} [\{ (\theta_i\theta_i) dt + (\theta_i\theta_\tau) d\tau \}^2 + \{ (\theta_i\theta_i)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_i\theta_\tau)^2 \} d\tau^2] = 0$$

aus (3), d. h. die Gleichung (5) hat keine reellen Wurzeln, wenn $(\theta\theta) > 0$ ist. Daher hat (5) nur Werte mit einem Vorzeichen, und die Form ist definit; da sie im Sonderfall $d\tau=0$ wegen $(\theta_i\theta_i)$ positiv ist, ist dieses Vorzeichen $+1$, die Form also positiv definit.

Aus $(\theta\theta)=0$ folgt übrigens wegen (5)

$$\cos\theta = \pm 1,$$

also $\theta=0$ oder π und somit gerade der Fall linearer Abhängigkeit der t und τ .

(29) Wir wollen jetzt die Figuren betrachten, aus einem Kreis $\mathfrak{x}^\alpha [\alpha=I, II]$ und einer Kugel \mathfrak{z} des R_3 -Raumes bestehen, die wir in normierten Koordinaten

$$\hat{\mathfrak{y}}\hat{\mathfrak{y}}=1$$

gegeben denken.

Greifen wir eine Kugel

$$\mathfrak{z} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$$

aus dem Büschel \mathfrak{x}^α heraus, so ist der Winkel ϕ zwischen \mathfrak{y} und \mathfrak{z} nach

$$\cos^2\phi = \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})^2}{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}$$

durch

$$(1) \quad \cos^2\phi = \frac{[\rho_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y})]^2}{\rho_\alpha \rho^\alpha}$$

gegeben.

Der Winkel φ des Kreises mit der Kugel \mathfrak{y} ist nun der kleinste Winkel, den eine durch ihn hindurch gehende Kugel \mathfrak{z} mit \mathfrak{y} bilden kann.

Um ihn zu finden, haben wir also $\cos^2\psi$ nach (1) als Funktion der variablen Kugel \mathfrak{z} , also als Funktion von ρ_I und ρ_{II} zu betrachten und das Minimum aufzusuchen.

Aus

$$\frac{\partial(\cos^2\psi)}{\partial\rho_r}=0 \quad [r=I, II]$$

folgt eine Relation der Form:

$$(2) \quad A^{rs}\rho_s \text{ prop. } (\mathfrak{x}^r\mathfrak{y}).$$

Multiplizieren wir (2) beiderseits mit A_{sr} , so ergibt sich

$$(3) \quad \rho_s \text{ prop. } (\mathfrak{x}^s\mathfrak{y}).$$

Da (1) auf der rechten Seiten in den ρ_s vom Grade Null ist, kommt es auf den Proportionalitätsfaktor nicht an, und durch Einsetzen von (3) in (1) erhalten wir für den Winkel zwischen Kreis und Kugel:

$$(4) \quad \cos^2\varphi = (\mathfrak{x}_s\bar{\mathfrak{y}})(\mathfrak{x}^s\bar{\mathfrak{y}}),$$

Sollen Kreis und Kugel senkrecht aufeinander stehen, so muss

$$(5) \quad \cos^2\varphi = A_{sr}(\mathfrak{x}^s\mathfrak{y})(\mathfrak{x}^r\mathfrak{y}) = 0$$

sein.

Wegen $|A_{sr}| = 1 : A > 0$ ist diese Gleichung im Reellen nur möglich, wenn

$$(6) \quad \mathfrak{x}^s\mathfrak{y} = 0$$

ist.

Treiben wir Geometrie im Komplexen, so ist auch der Fall (5) möglich, ohne dass (6) gilt.

Wir wollen das sagen, der Kreis sei halbsenkrecht zur Kugel \mathfrak{y} . Wählen wir als Hilfskugel \mathfrak{x}^* speziell die Scheitel

$$\mathfrak{x}^I = u, \quad \mathfrak{x}^{II} = \mathfrak{B}$$

so folgt aus $A > 0 : u\mathfrak{B} \neq 0$, und es gilt

$$A_{11}=0, \quad A_{12}=\frac{1}{u\mathfrak{B}}, \quad A_{22}=0$$

und nach (4) ist

$$\cos^2\varphi = \frac{(\hat{u}\hat{\mathfrak{y}})(\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{y}})}{(\hat{u}\mathfrak{B})}.$$

Daraus erkennen wir: Ist der Kreis halbsenkrecht zur Kugel \mathfrak{y} , so liegt einer seiner Scheitel auf ihr; ist er zu der Kugel senkrecht, so liegen seine beiden Scheitel auf ihr.

(30) Es seien \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$ zwei Kreise im R_3 .

Ist $\bar{\mathfrak{y}} = \rho_a \mathfrak{x}^a$ eine normierte Kugel im R_3 durch \mathfrak{R} mit

$$(1) \quad \hat{\mathfrak{y}}\hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b A^{ab} = 1,$$

so muss

$$(2) \quad \cos^2\varphi = T^{ab} \rho_a \rho_b$$

sein, wobei φ der Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}$ ist. Aus (1), (2) folgt:

$$(3) \quad \cos\varphi = \frac{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2}.$$

Für andere Systeme der Kreise und Kugel haben wir eine ähnliche Beziehung wie (3) in der Formel:

$$(4) \quad \cos\bar{\varphi} = \frac{\bar{T}^{11}\rho_1^2 + 2\bar{T}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{T}^{22}\rho_2^2}{\bar{A}^{11}\rho_1^2 + 2\bar{A}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{A}^{22}\rho_2^2}.$$

Lassen wir bei (2), (3) und

$$(5) \quad c_1\rho_1^2 + 2c_2\rho_1\rho_2 + c_3\rho_2^2 = 0$$

ρ_1 und ρ_2 weg, so haben wir:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T^{11} - \cos\varphi A^{11} & T^{12} - \cos\varphi A^{12} & T^{22} - \cos\varphi A^{22} \\ \bar{T}^{11} - \cos\bar{\varphi} \bar{A}^{11} & \bar{T}^{12} - \cos\bar{\varphi} \bar{A}^{12} & \bar{T}^{22} - \cos\bar{\varphi} \bar{A}^{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{vmatrix} - \cos\varphi \begin{vmatrix} e_1 & c_2 & c_3 \\ A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{vmatrix} - \cos\bar{\varphi} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{22} \end{vmatrix} \\
 & + \cos\varphi \cos\bar{\varphi} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{22} \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Also ist im allgemeinen die Beziehung zwischen φ und $\bar{\varphi}$ abhängig von (5).

Wenn die vier Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & & c_1 & c_2 & c_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} & & A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} & , & \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} e_1 & c_2 & c_3 & & c_1 & c_2 & c_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} & & A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{22} & , & \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{22} \end{vmatrix},$$

einen gemeinsamen Factor in der Form

$$c_1 X + c_2 Y + c_3 Z$$

haben, so ist (6) unabhängig von (5), und wir erhalten den

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (6) unabhängig von (5) ist, ist dass die Kurvenscharen involutorisch zu

$$T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2 = 0,$$

$$A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2 = 0$$

und involutorisch⁽¹⁾ zu

$$\bar{T}^{11}\rho_1^2 + 2\bar{T}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{T}^{22}\rho_2^2 = 0,$$

$$\bar{A}^{11}\rho_1^2 + 2\bar{A}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{A}^{22}\rho_2^2 = 0$$

gehören.

(31) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(u, v)$ sei eine Kugel, die dreimal nach u, v differenzierbar ist.

(1) Vergl. K. OGURA: On the theory of representation of surfaces, Tôhoku Math. Journal, Vol. 12 (1917), p. 267.

$$\xi(u, v) + \eta(u, v)$$

sei ein Kreis in R_3 , wo $\xi(u, v)$ gleichfalls dreimal differenzierbar ist.

Setzen wir

$$d\xi \cdot d\eta = 0$$

voraus, so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\eta(u, v)$ der Kugel, so dass

$$(1) \quad \eta_u = \eta \times \xi_u, \quad \eta_v = \eta \times \xi_v$$

ist. Hieraus folgt wegen $\eta_{uv} = \eta_{vu}$

$$(2) \quad \eta_v \times \xi_u = \eta_u \times \xi_v$$

und daher

$$(\eta_v \xi_u \xi_v) = 0, \quad (\eta_u \xi_v \xi_u) = 0,$$

d. d. für η_u, η_v gelten Gleichungen folgender Art :

$$(3) \quad \eta_u = \alpha \xi_u + \beta \xi_v, \quad \eta_v = \gamma \xi_u + \delta \xi_v.$$

Wird dies in (2) eingesetzt, so erhält man

$$(4) \quad \delta = -\alpha.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Funktionen von u, v zwischen denen ausserdem noch weitere Gleichungen bestehen.

Wir setzen in (3) statt δ nach (4) $-\alpha$ und berücksichtigen $\eta_{uv} = \eta_{vu}$, so erhalten wir

$$(5) \quad (\alpha_v - \gamma_u) \xi_u + (\alpha_u + \beta_v) \xi_v = \gamma \xi_{uu} - 2\alpha \xi_{uv} - \beta \xi_{vv}.$$

Nun kann man (5) in der Form der Gleichung^{a)}

$$(6) \quad \sigma \xi_u + \xi_v + \lambda \xi_{uv} = 0$$

transformieren.

Aus (5) folgt der^{b)}

(1) EISENHART: Transformations of surfaces, Princeton (1923) p. 238.

(2) Siehe NAKAJIMA, S: Einige Beiträge über konvexe Kurven und Flächen; Tôhoku Math. Journal, Vol. 32 (1930) p. 223.

Satz: Wenn \mathfrak{K} eine Kugel ist, so ist uns dadurch auf der Kugel ein Kurvennetz gegeben, das rechtwinklig ist.

(32) Es seien \mathfrak{K} , $\bar{\mathfrak{K}}$ zwei Kreise im R_3 . Ist $\mathfrak{y} = \rho_a \mathfrak{x}^a$ eine normierte Kugel mit

$$(1) \quad \hat{\mathfrak{y}}\hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b A^{ab} = 1,$$

so muss sein:

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b T^{ab},$$

wobei φ der Winkel zwischen $\tilde{\mathfrak{y}}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ ist.

Also kann man setzen:

$$(3) \quad \hat{\mathfrak{y}}\hat{\mathfrak{y}} = \mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2 = 1,$$

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = l_1 \mathfrak{M}_1^2 + l_2 \mathfrak{M}_2^2,$$

an Stelle von (1) und (2), wobei

$$\mathfrak{M}_1 = m_{11}\rho_1 + m_{12}\rho_2, \quad \mathfrak{M}_2 = m_{21}\rho_1 + m_{22}\rho_2,$$

und

$$(m_{11}\rho_1 + m_{12}\rho_2)^2 + m_{21}\rho_1 + m_{22}\rho_2 = \rho_a \rho_b A^{ab},$$

$$l_1(m_{11}\rho_1 + m_{12}\rho_2)^2 + l_2(m_{21}\rho_1 + m_{22}\rho_2)^2 = \rho_a \rho_b T^{ab}$$

sind.

Setzen wir nun

$$\mathfrak{M}_1 = \cos \theta, \quad \mathfrak{M}_2 = \sin \theta$$

in (3) ein, so folgt aus (4):

$$\cos^2 \varphi = l_1 \cos^2 \theta + l_2 \sin^2 \theta.$$

Ist θ variabel, d. h. sind ρ_1 , ρ_2 variabel und $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, dann ist

$$l_1 \cos^2 \theta + l_2 \sin^2 \theta$$

der Abstand zwischen dem Mittelpunkte und einem beliebigen Punkte einer Ellipse, wobei $\sqrt{l_1}$, $\sqrt{l_2}$ die beiden Halbmesser der Ellipse sind.

(33) Wir einsetzen⁽¹⁾

$$2T = (\theta_t \theta_t) \dot{t}^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \dot{t} \dot{\tau} + (\theta_\tau \theta_\tau) \dot{\tau}^2,$$

dann ist T ähnlich wie kinetische Energie in Dynamik.

Man führt durch die Substitution :

$$t = t(t_1, \tau_1), \quad \tau = \tau(t_1, \tau_1)$$

und

$$\dot{t} = \frac{\partial t}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1$$

ein neues Koordinatensystem t_1, τ_1 ein, dann die Gleichung T im Systeme t_1, τ_1 ist :

$$\begin{aligned} 2T = & (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1 \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1 \right) \\ & \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1 \right) + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \dot{\tau}_1 \right)^2, \end{aligned}$$

oder nach $\dot{t}_1^2, \dot{t}_1 \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_1^2$ geordnet :

$$\begin{aligned} 2T = & \left\{ (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right)^2 \right\} \dot{t}_1^2 \\ & + 2 \left\{ (\theta_t \theta_t) \frac{\partial t}{\partial t_1} \frac{\partial t}{\partial \tau_1} + (\theta_t \theta_\tau) \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right) + (\theta_\tau \theta_\tau) \right. \\ (A) \quad & \left. \times \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right\} \dot{t}_1 \dot{\tau}_1 + \\ & + \left\{ (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right)^2 \right\} \dot{\tau}_1^2. \end{aligned}$$

Wenn die Schar der $t_1 \tau_1$ - Parameter Kreise, welche auf der zweiten Schar gleiche T abschneidet, soll kurz als die Schar der

(1) Vergl. NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VII); Tôhoku Math. Journal, Vol. 32, p. 210.

„Teiler-Kreisen“ oder „Teiler“ und jene, auf der gleiche T abgeschnitten werden, als „geteilte Kreisen“ oder „Geteilte“ bezeichnet werden. Sind die Kreisen $t_1=c$ ($c=\text{const.}$) die Teiler der Kreisen $\tau_1=c$, dann muss

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial t_1} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right)^2 = 1$$

sein.

Soll die beiden Scharen des Koordinatensystems sich gegenseitig teilen, dann muss auch

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right)^2 = 1$$

sein.

Zur Bestimmung des Koordinatensystems hat man dann zwei Differentialgleichungen (1), (2).

Ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu stören, kann man

$$(\theta_t \theta_t) = 1, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

setzen, oder das System der Kreisen

$$(\theta_t \theta_t) = 0, \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0$$

benützen.

Nächst werden wir den zweite Art der Ableitung der Differentialgleichung zu.

Es sollen jetzt die Parameter $t_1 = \varphi(t, \tau)$, $\tau_1 = \psi(t, \tau)$ eines Teilernetzes als Funktionen von t und τ bestimmt werden, wobei t_1 die T der geteilten Kreisen $\psi=c$ ist.

Man gibt sich das Koordinatensystem $\varphi(t, \tau) = c_1$, $\psi(t, \tau) = c_2$ und verlangt, dass die Gleichung der T ist:

$$(2') \quad 2T = \dot{\varphi}^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \dot{\varphi} \dot{\psi} + (\theta_\tau \theta_\tau) \dot{\psi}^2.$$

Geht man auf das Koordinatensystem $t=c_1$, $\tau=c_2$ zurück, dann ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} i + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \dot{\tau} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} i + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \dot{\tau} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} i + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} i + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} \right)^2 = \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \right. \\
& \quad \times \left. \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\} \dot{\tau}^2 \\
& + 2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + (\theta_i \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} i \dot{\tau} \\
& + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 \dot{\tau}^2.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss identisch sein mit

$$(\theta_i \theta_i) \dot{\tau}^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) i \dot{\tau} + (\theta_\tau \theta_\tau) \dot{\tau}^2.$$

Es müssen also folgende drei Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = (\theta_i \theta_i),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + (\theta_i \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

$$= (\theta_i \theta_\tau),$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 = (\theta_\tau \theta_\tau).$$

Man hat zur Bestimmung der zwei Unbekannten $(\theta_i \theta_\tau)_1$ und drei Gleichungen.

Also muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden.

$$\begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\theta_i \theta_i) & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} & \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_i \theta_\tau) & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 - (\theta_\tau \theta_\tau) & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} & \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Ausgerechnet ergibt die Determinante folgendes Produkt:

$$(\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i) \{ (\theta_i \theta_\tau) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2 \\ - (\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i)^2 \} = 0$$

Dieses Produkt ist Null, wenn einer der beiden Faktoren aus dem es besteht, Null ist.

Verschwindet der Faktor

$$\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i,$$

so bedeutet das, dass eine der beiden Funktionen φ und ψ nur wieder eine Funktionen der andern ist, also bleibt die Differentialgleichung

$$(\theta_i \theta_\tau) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2 = (\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i)^2$$

als gesuchte Bedingung.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fragestellungen :

(I) Es sollen die Kreisen $\psi=c_2$, also die Geteilten, gegeben sein und gesucht werden die Kreisen $\varphi=c_1$, welche die Teiler sind.

Die Differenzialgleichung wird dann :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi_\tau - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \psi_i = \sqrt{(\theta_i \theta_\tau) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2}.$$

Das ist für φ eine partielle Differenzialgleichung.

Man behandelt sie nach der allgemeinen Methode, nämlich durch Lösung des Systems :

$$\frac{dt}{\psi_\tau} = - \frac{d\tau}{\psi_i} = - \frac{d\varphi}{\sqrt{(\theta_i \theta_\tau) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2}}$$

und sucht zwei intermediäre Integrale $\varphi=c_1$ und $\psi=c_2$, wobei φ die T von $\psi=c_2$ ist, wie das aus der Auflösung folgt.

Das allgemeine Integral ist dann

$$\varphi_1 = F(\psi).$$

Es liegt in der Natur der Aufgabe, dass man auf eine partielle Differenzialgleichung kommen musste.

Denn kann man sich bei gegebenen eine beliebige Kreise als Anfangskreise für die Teiler geben und kommt dann zur Teilerschar, indem man

von den Punkten dieser Anfangskreise aus auf den Kreisen $\phi=c$ gleiche T abträgt.

Alle Teilerscharen der Kreise $\phi=c$ sind dann in der Formel enthalten :

$$\Phi \equiv \varphi + F(\phi) = c,$$

wo F das Zeichen für eine noch beliebig zu wählende Funktion ist.

$$\Phi \equiv F(\phi) = c$$

ist dann die oben erwähnte willkürlich zu wählende Anfangskreise. Bestimmt man $F(\phi)$, dann erhält man die Kreise derselben Schar, indem man c variiert.

Dass diese Kreise dann die Teiler der Kreise $\phi=c$ sind, kann man leicht auch folgendermassen einsehen; man schreibt die Formel zunächst $\varphi = F(\phi) + c$.

$c=0$ dann bekommt man, indem man auf $\phi=c$ immer T in $\varphi = F(\phi)$ aufträgt, einen bestimmten Anfangskreis.

Wählt man nun $c=d$, dann wird auf demselben Kreise $\phi=c$ dasselbe $F(\phi)$ abgetragen, immer aber vermehrt um dasselbe d, es ist also der zweite Kreis immer um dasselbe $T(=d)$ von dem ersten entfernt.

(II) Sind die Kreise $\varphi=c$ gegeben und die zu diesen gehörigen geteilten Kreise gesucht, dann ergibt sich folgende Differenzialgleichung:

$$((\theta_i \theta_i - \varphi_i^2) \psi_\tau^2 - 2((\theta_i \theta_\tau) - \varphi_i \varphi_\tau) \psi_i \psi_\tau + ((\theta_\tau \theta_\tau) - \varphi_\tau^2) \psi_i^2 = 0.$$

Man dividiert mit ψ_τ^2 und setzt

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{\psi_i}{\psi_\tau}.$$

Es ergibt sich dann

$$((\theta_i \theta_i) - \varphi_i^2) + 2((\theta_i \theta_\tau) - \varphi_i \varphi_\tau) \frac{d\tau}{dt} + ((\theta_\tau \theta_\tau) - \varphi_\tau^2) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 0,$$

Es gibt eine Differenzialgleichung zweiten Grades, also erhalten wir den

Satz: Von einem Punkte A der einen Teilerkreise kann man ja doch immer in zwei Richtungen fortschreiten, sodass $T(=AB)$ gleich dem $T(=AC)$ ist.

Nimmt man statt φ eine beliebige Funktion $F(\varphi)$, so bleibt das System der Teilerkreise erhalten, die Kreise sind nur in anderer Anordnung.

Alle Scharen der Geteilten, zu denen $\varphi=c$ die Teiler sind, genügen also der Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} & ((\theta, \theta_t) - (F(\varphi)\varphi_t)^2) + 2((\theta, \theta_\tau) - F'(\varphi)\varphi_t\varphi_\tau) \frac{d\tau}{dt} \\ & + ((\theta_\tau\theta_\tau) - (F'(\varphi)\varphi_\tau)^2) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$F'(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}.$$

Diese beliebige Funktion $F(\varphi)$ entspricht der Tatsache, dass man T zwischen den Teilern beliebig wählen darf.

Es sollen jetzt alle Kreissysteme gesucht werden, zu denen die Kreise $u=c$ Teiler sind.

Sie sind durch die Differenzialgleichung gegeben:

$$(\theta, \theta_t) + 2(\theta, \theta_\tau) \frac{d\tau}{dt} + (\theta_\tau\theta_\tau) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = F(t).$$

Es ist dann

$$2T = \int \sqrt{F(t)} dt,$$

die Gleichung der T , also ist T nur eine Funktion von t .

Löst man die Gleichung nach $\frac{d\tau}{dt}$ auf, dann erhält man:

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{(\theta, \theta_\tau)}{(\theta_\tau\theta_\tau)} \pm \sqrt{- \frac{F(t)}{(\theta_\tau\theta_\tau)} - \frac{(\theta, \theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2}{(\theta_\tau\theta_\tau)^2}}.$$

Wenn der Fall, bei dem die beiden Kreissysteme $\varphi=c$ in eines zusammenfallen, dann gibt es nur ein Kreissystem $\varphi=c$, wenn die Quadratwurzel verschwindet, also

$$\frac{(\theta, \theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2}{(\theta_\tau\theta_\tau)} = F(t)$$

ist. Wenn aber

$$\frac{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}{(\theta_\tau \theta_\tau)}$$

nur von t abhängt, dann folgt daraus dass die Differenzialgleichung der geteilten Kreisen ist:

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{(\theta_\tau \theta_\tau)}.$$

Durch diese Differenzialgleichung sind aber die zu den Kreise $t=c$ orthogonal Trajektorien definiert.

Nun wollen wir untersuchen den Fall⁽²⁾

$$(\theta_i \theta_i) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2 = (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2.$$

Auf den Kurven $\varphi=c$ schneiden dann die durch die Differenzialgleichung

$$(\theta_i \theta_i) \psi_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \psi_i \psi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_i^2 = (\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i)^2$$

bestimmten Kurven $\varphi=c$ gleiche T ab.

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(3) \quad \varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i = \pm \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}.$$

Also ergibt sich hierbei den

Satz: Sind $\varphi=const.$ einer Schar von Kreise mit ihren Teilern $\varphi=const.$ vermitteln, dann wird eine Flächeninhalt

$$\iint (\varphi_i \psi_\tau - \varphi_\tau \psi_i) dt d\tau$$

in die Ebene: $x=\varphi(t, \tau)$, $y=\varphi'(t, \tau)$ durch

$$\iint |\pm \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}| dt d\tau$$

dargestellt.

Wenn $(\theta_i \theta_\tau)_i \equiv 0$ in (2') ist, dann sind Lagrange'sche Gleichungen wie folgendes

(2) Vergl. Encyklopädie der Math. Wissenschaften III; Leipzig (1902-1927) S. 149.

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\theta_\tau \theta_\tau)_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{\partial U_\psi}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt}((\theta_\tau \theta_\tau)_1 \dot{\varphi}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\theta_\tau \theta_\tau)_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{\partial U_\psi}{\partial \varphi} \end{cases}$$

wobei U die gesuchte unbekannte Funktion ist.

$\dot{\psi}=0$ ist einer Potentialfunktion in Dynamik ähnlich.

Wenn $\dot{\psi}=0$ ist, dann aus (4) folgen :

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{\partial U_\psi}{\partial \varphi}, \\ 0 = -\frac{\partial U_\psi}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Aus (5) haben wir :

$$\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

also

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2} F(\varphi)} d\varphi$$

wo F eine beliebige Funktion von φ ist.

Wenn $p \equiv 0$ oder $q \equiv 0$ ist, dann folgt

$$(\theta_\tau \theta_\tau)_1 \equiv 0,$$

so aus (2') haben wir :

$$(6) \quad T = \dot{\varphi}^2 + 2(\theta_\tau \theta_\tau)_1 \varphi \dot{\varphi}.$$

Aus (6) kann man wissen dass langs

$$\varphi = \text{const.}$$

wo T eine Konstant ist.

In (2'), wenn

$$(\theta_\tau \theta_\tau)_1 \equiv 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \equiv 1,$$

dann folgt

$$U + h = k,$$

wobei U einer Kraftfunktion ähnlich ist, und h, k zwei Konstanten bedeuten ;

Wenn zwei T :

$$2T_1 = (\theta_t \theta_t)_1 \dot{t} + 2(\theta_t \theta_\tau)_1 \dot{t} \dot{\tau} + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 \dot{\tau}^2,$$

$$2T_2 = (\theta_t \theta_t)_2 \dot{t}^2 + 2(\theta_t \theta_\tau)_2 \dot{t} \dot{\tau} + (\theta_\tau \theta_\tau)_2 \dot{\tau}^2$$

dieselbe Determinante besitzen, die dann, weil die beiden Formen definit sind, einen positiven Wert hat. Also

$$(\theta_t \theta_t)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_\tau)_1^2 = (\theta_t \theta_t)_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 - (\theta_t \theta_\tau)_2^2 = J > 0,$$

wobei auf zwei krummen Flächen gelegener Gebiete lässt sich, wenn $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ zwei einander auf beiden Flächenstücken entsprechende Kurvenscharen sind.⁽¹⁾

Dann gibt es in jedem Punkte zwei sich zu zwei Kurvennetzen zusammenschliessende Richtungen in denen $T_1 = T_2$ ist.

Diese Richtungen ergeben sich aus den Wurzeln der in $\frac{d\tau}{dt}$ quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} U = 2T_1 - 2T_2 = [(\theta_t \theta_t)_1 - (\theta_t \theta_t)_2] \dot{t}^2 + 2[(\theta_t \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_\tau)_2] \dot{t} \dot{\tau} \\ + [(\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_\tau \theta_\tau)_2] \dot{\tau}^2 = 0, \end{aligned}$$

Sind U stets reell, die Determinante D von U ist nämlich negativ, wie sich in folgender Weise ergibt :

$$\begin{aligned} D = [(\theta_t \theta_t)_1 - (\theta_t \theta_t)_2][(\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_\tau \theta_\tau)_2] - [(\theta_t \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_\tau)_2]^2 \\ = [(\theta_t \theta_t)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_\tau)_1^2] + [(\theta_t \theta_t)_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 - (\theta_t \theta_\tau)_2^2] \\ - [(\theta_t \theta_t)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 - (\theta_t \theta_\tau)_2 (\theta_\tau \theta_t)_1 - 2(\theta_t \theta_\tau)_1 (\theta_t \theta_\tau)_2] \end{aligned}$$

Die beiden ersten Summanden sind gleich der Determinante Δ , führt man in dem 3. Glied die aus der Determinante Δ berechneten Ausdrücke

(1) Vergl. NAKAJIMA, S: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VII); Tohoku Math. Journ. Vol. 32 (1930) p. 211.

ein :

$$(\theta_\tau \theta_\tau)_1 = \frac{\Delta + (\theta_t \theta_\tau)_1^2}{(\theta_t \theta_t)_1}, \quad (\theta_\tau \theta_\tau)_2 = \frac{\Delta + (\theta_t \theta_\tau)_2^2}{(\theta_t \theta_t)_2}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} D &= 2\Delta - \frac{(\theta_t \theta_t)_1}{(\theta_t \theta_t)_2} \Delta - \frac{(\theta_t \theta_t)_1}{(\theta_t \theta_t)_2} (\theta_t \theta_\tau)_2^2 - \frac{(\theta_t \theta_t)_2}{(\theta_t \theta_t)_1} \Delta \\ &\quad - \frac{(\theta_t \theta_t)_2}{(\theta_t \theta_t)_1} (\theta_t \theta_\tau)_1^2 + 2(\theta_t \theta_\tau)_1 (\theta_t \theta_\tau)_2 \\ D &= -\Delta \left(\sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t)_1}{(\theta_t \theta_t)_2}} - \sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t)_2}{(\theta_t \theta_t)_1}} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t)_1}{(\theta_t \theta_t)_2}} (\theta_t \theta_\tau)_1 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t)_2}{(\theta_t \theta_t)_1}} (\theta_t \theta_\tau)_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Dieser letztere Ausdruck ist, da Δ positiv ist und die beiden Quadrate nicht gleichzeitig verschwinden, sicher negativ; also ist

$$D < 0.$$

(34) Nun werden t' , τ' und $(\theta_t \theta_t)'$ der Gleichung⁽¹⁾

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = (\theta_t \theta_t)' (dt'^2 + d\tau'^2)$$

gemäss bestimmt.

Die Klammergrösse auf der rechten Seite kann man in die beiden konjugiert-komplexen Faktoren $dt' \pm i d\tau'$ zerlegen.

Führt man eine solche Zerlegung auch auf der linken Seite aus, so nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left[\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + iT}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right] \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - iT}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right) \\ &= (\theta_t \theta_t)' (dt' + i d\tau') (dt' - i d\tau') \end{aligned}$$

wobei $T = \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}$ ist.

Es sei λ ein integrierender Faktor des ersten der beiden Differentialausdrücke links, also

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Keisscharen (IV), Tôhoku Math. Journ. Vol. 32 (1930) p. 210.

$$\lambda \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Gamma}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right) = d(P + iQ),$$

wo P und Q Funktionen von t und τ bedeuten.

Die Bestimmung von λ aus der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda \sqrt{(\theta_t \theta_t)}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Gamma}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \right)$$

erfordert die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(3) \quad \sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Gamma}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau = 0.$$

Hat man deren Integral auf irgend einem Wege gefunden und in die Form

$$P + iQ = c$$

gesetzt, so muss für

$$\lambda = \mu + iv$$

bei passender Wahl von μ und ν die Beziehung

$$(\mu + iv) \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) + i\Gamma}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right) = dP + i dQ$$

stattfinden.

Mit ihr gleichzeitig gilt

$$(\mu - \nu i) \left(\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt + \frac{(\theta_t \theta_\tau) - i\Gamma}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} d\tau \right) = dP - i dQ.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich eine Formel, die mit (2) identisch wird, wenn man

$$t' = P, \quad \tau' = Q, \quad (\theta_t \theta_t)' = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$$

setzt.

Die Auffindung zweier Scharen von Linien, für die

$$(\theta_t \theta_t)' = (\theta_\tau \theta_\tau)', \quad (\theta_t \theta_t)' = 0$$

wird, hängt also ab von der Integration der Gleichung (3) oder, was auf

dasselbe hinaus kommt, der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$(4) \quad (\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Allerdings sind μ und ν Funktionen von t und τ , während $(\theta, \theta_t)'$ als Funktion von t' und τ' erklärt ist.

Wenn aber einmal die Integration von (3) oder (4) geleistet und damit der funktionale Zusammenhang zwischen t , τ und t' , τ' ermittelt ist, so kann $\frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$ in eine Funktion von t' und τ' umgesetzt werden.

Angenommen besteht die Gleichung

$$(5) \quad (\theta, \theta_t)' (dt' + d\tau'^2) = (\theta, \theta_t)_1 (dt_1^2 + d\tau_1^2).$$

Die Grössen t_1 , τ_1 sind Funktionen der Ursprünglichen Koordinaten t und τ , also auch Funktionen von t' und τ' .

Setzt man

$$dt_1 = -\frac{\partial t_1}{\partial t} dt' + \frac{\partial t_1}{\partial \tau'} d\tau',$$

$$d\tau_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} d\tau',$$

so folgt aus (5):

$$\left(-\frac{\partial t_1}{\partial t'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial t'}\right)^2 = \left(-\frac{\partial t_1}{\partial \tau'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'}\right)^2 = \frac{(\theta, \theta_t)'}{(\theta, \theta_t)_1}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial t'} - \frac{\partial t_1}{\partial \tau'} + \frac{\partial \tau_1}{\partial t'} - \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist das Ergebnis der Elimination von α aus

$$-\frac{\partial \tau_1}{\partial t'} = \alpha - \frac{\partial t_1}{\partial t'}, \quad -\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{\partial t_1}{\partial \tau'}.$$

Werden diese Werte in die vorhergehende Relation eingesetzt, so ergibt sich für $\varepsilon = \pm 1$

$$-\frac{\partial t_1}{\partial \tau'} = \varepsilon \alpha \frac{\partial t_1}{\partial t'} = \varepsilon \frac{\partial \tau_1}{\partial t'}, \quad -\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} = -\varepsilon \frac{\partial t_1}{\partial \tau'}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial(t_1 + i\tau_1)}{\partial\tau'} = \varepsilon \frac{\partial(\tau_1 - it_1)}{\partial t'} = -\frac{\varepsilon}{i} \frac{\partial(t_1 + i\tau_1)}{\partial t'},$$

d.h. die Grösse

$$t_1 + i\tau_1 = w$$

genügt als Funktion von t' und τ' der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial w}{\partial t'} - \varepsilon i \frac{\partial w}{\partial \tau'} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$w = \varphi(t' - \varepsilon i \tau')$$

für φ als willkürliche Funktion.

Hiernach müssen sich t_1 und τ_1 aus

$$(6) \quad t_1 + i\tau_1 = \varphi(t' \pm i\tau')$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären ergeben.

Versteht man unter $\psi(t' \mp i\tau')$ die zu $\varphi(t' \pm i\tau')$ konjugierte Funktion, d.h. diejenige, die aus ihr hervorgeht wenn überall, auch in den etwa vorkommenden komplexen Konstanten, i mit $-i$ vertauscht wird, so kann man auch die Gleichung

$$(7) \quad t_1 - i\tau_1 = \psi(t' \mp i\tau')$$

hinzunehmen und t_1 , τ_1 aus (6) und (7) bestimmen.

Dass umgekehrt, wenn in den Gleichungen

$$t_1 + i\tau_1 = \varphi(t' + i\tau'), \quad t_1 - i\tau_1 = \psi(t' - i\tau')$$

oder

$$t_1 + i\tau_1 = \varphi(t' - i\tau'), \quad t_1 - i\tau_1 = \psi(t' + i\tau')$$

unter φ eine beliebige Funktion verstanden wird, die Kurven $t_1 = \text{const.}$, $\tau_1 = \text{const.}$ ein isometrisches Netz bilden, ergibt sich unmittelbar.

~ Denn man erhält

$$dt_1^2 + d\tau_1^2 = \varphi'(\tau' \pm i\tau')\psi'(\tau' \mp i\tau')(dt'^2 + d\tau'^2)$$

oder, bei Hinzunahme von (1), die Minimallinien sind⁽¹⁾

$$\frac{(\theta_t \theta_t)'}{\varphi' \psi'} (dt_1^2 + d\tau_1^2) = 0.$$

(35) Man kann den folgenden Satz beweisen: \mathfrak{z} und \mathfrak{z}^* seien zwei konvexe Kreisflächen im R_2 , deren Punkte eindeutig durch parallele und gleichgerichtete Flächennormalen einander zugeordnet sind.

Für jede Wahl von gemeinsamen Flächenparametern t, τ sein die ersten Fundamentalgrößen in zugeordneten Punkten einander gleich d.h.

$$(\theta_t \theta_t) = (\theta_t \theta_t)^*, \quad (\theta_t \theta_\tau) = (\theta_t \theta_\tau)^*, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = (\theta_\tau \theta_\tau)^*.$$

Dann sind die beiden Flächen bis auf eine Translation miteinander identisch.⁽²⁾

(36) Wir denken uns die Kreise des euklidischen R_2 in bekannter Weise auf die Punkte des euklidischen R_2 abgebildet, indem wir der Kreis mit der Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

den Punkt mit den Koordinaten $a, b, \pm ir$ zuordnen.

Den beiden Werten von ir tragen wir dadurch Rechnung, dass wir die Kreis durch Angabe eines Drehungssinnes auf ihrer Umgebung orientieren.

Einer Kreis mit positivem Drehungssinn soll das positive, einer Kreis mit negativem Drehungssinne das negative Zeichen zugeordnet werden.

Wir sagen kurz, die Punkte des R_2 sind isotrop auf die orientierten Kreise des R_2 projiziert.

Sollen sich zwei Kreise mit den Koordinaten $(a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2)$ gleichsinnig berühren, so muss

$$(1) \quad (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = (r_1 - r_2)^2$$

(1) Vgl. z. B. BIANCHI L.: Lezioni di Geometria infinitesimale, Pisa (1894) p. 69.

(2) Vergl. NAKAJIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen; Japanese Journal of Mathematics, 4 (1927) p. 101 und Japanese Journal of Mathematics, 6 (1929) p. 28.

sein, d.h. die beiden Bildpunkte im R_3 müssen die Entfernung Null haben.

Den Punkten einer Kurve des R_3 entsprechen ∞^1 Kreise des R_2 , deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen (Kreisreihe); sie werden im allgemeinen von einer Hüllkurve umhüllt.

Einer isotropen Geraden des R_3 entsprechen nach Gleichung (1) ∞^1 Kreise, die sich in einem Punkte berühren.⁽¹⁾

Einer isotropen Kurve des R_3 entsprechen ∞^1 Kreise, bei denen jede die benachbarte berührt, d.h. die Schmiegkreise einer Ebenekurve.

Im Besonderen kann man im letzten Falle setzen

$$\begin{cases} a = \varphi(s) \\ b = k\varphi(s) + q \\ r = \pm i\sqrt{1+k^2}\varphi(s) + q, \quad i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

wobei a , b der Mittelpunkt des Kreises im R_2 und r sein Radius sind.⁽²⁾

(37) Es sei $p(\varphi)$ der Abstand des Ursprungs O von Stützgeraden der Eilinie E mit den Tangentenwinkel φ , ρ ihr Krümmungsradius, L ihr Umfang und I der Flächeninhalt, der von ihr berandet wird.⁽³⁾

Dann behaupte ich:

Es ist sowohl

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi)}{\rho(\varphi)} d\varphi \geq 1,$$

als auch

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\varphi)}{p(\varphi)} d\varphi \geq 1,$$

d. h. die Mittelwerte von $\frac{p}{\rho}$ und des reziproken Wertes $\frac{\rho}{p}$ sind gleichzeitig nicht kleiner und sogar i. A. grösser als Eins, wie nachher folgt.

- (1) Vergl. KLEIN, F.: Vorlesungen über höhere Geometrie. 3. Aufl., S. 248, 'Springer, Berlin, 1926.
- (2) Vergl. MATSUMURA, S.: On Some differential equations, Journal of the society of tropical agriculture, Vol. 4 (1932) p. 83.
- (3) Vergl. JOBEAN, C. et FIEDLER, R.: Contribution à l'étude des Courbes Convexes fermées et de certaines Courbes qui s'y rattachent, Paris 1912, S. 7.

Nach der Isoperimetrischen Ungleichung und nach derjenigen von SCHWARZ ist nämlich

$$4\pi I \leq I^2 = \left(\int_0^{2\pi} p d\varphi \right)^2 = \left(\int_0^{2\pi} \rho d\varphi \right)^2 \leq \begin{cases} \int_0^{2\pi} p \rho d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{p}{\rho} d\varphi = 2I \int_0^{2\pi} \frac{p}{\rho} d\varphi. \\ \int_0^{2\pi} p \rho d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{p} d\varphi = 2I \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{p} d\varphi. \end{cases}$$

Man erkennt auch, dass die Gleichheitszeichen in (1) oder in (2) nur für Kreise gültig sind, da nur für diese in der isoperimetrischen Ungleichung das Gleichheitszeichen gültig ist.

2. Die Ungleichungen (1) und (2) lassen sich folgendermassen verallgemeinern.

Es sei ausser E eine zweite Filinie E_0 gegeben, die wir als Eichkurve einer relativen Kurventheorie benutzen (Vergl. W. Süss, Zur relativen Differentialgeometrie I, Jap. Journ. of Math. IV, 1927).

Ist r nämlich der Relativ-Abstand der Stützgeraden an E von O, P der Relativ-Krümmungsradius, der R-Bogen von E_0 , so folgt analog zu Nr. I: Es ist $[\Sigma = \oint r d\sigma = 2I(E_0)]$

$$(1') \quad \frac{1}{\Sigma} \oint \frac{r}{p} d\sigma \geq 1,$$

$$(2') \quad \frac{1}{\Sigma} \oint \frac{p}{r} d\sigma \geq 1,$$

und hierin gilt ein Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn E und E_0 einander homothetisch sind.

An Stelle der isoperimetrischen Ungleichung in Nr. I ist nur diejenige für den gemischten Flächeninhalt von E und E_0 zu setzen, die auf BRUNN und MINKOWSKI zurückgeht.

3. Zieht man die MINKOWSKI'sche Ungleichung für das Integral M der mittleren Krümmung heran, nennt man O die Oberfläche, S die Summe der Hauptkrümmungsradien, dw das Flächenelement des sphärischen Bildes, so erhält man analog zu Nr. I:

$$\pi_0 \leq M^2 \begin{cases} = \left(\int p dw \right)^2 \leq \int \frac{p\sigma}{2} dw \cdot \int \frac{2p}{\sigma} dw = 0 \cdot \int \frac{2p}{\sigma} dw, \\ = \left(\int \frac{\sigma}{2} dw \right)^2 \leq \int \frac{p\sigma}{2} dw \cdot \int \frac{\sigma}{2p} dw = 0 \cdot \int \frac{\sigma}{2p} dw; \end{cases}$$

es wird also

$$(3) \quad \frac{1}{4\pi} \oint \frac{2p}{\sigma} dw \geq 1, \quad \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\sigma}{2p} dw \geq 1,$$

und hierin ist jedes Gleichheitszeichen für Kugeln charakteristisch. Auch diese Ungleichungen lassen sich analog zu Nr. 2 relativgeometrisch erweitern, sie sind mit den Gleichheitszeichen aber nur dann für Homothetie von E und E_0 charakteristisch, wenn wir Ecken bei E und E_0 ausschliessen.

4. Die affine Differentialgeometrie lässt sich als relative bezüglich des Affinkrumbildes η anfassen.

Nun gilt bekanntlich die isoperimetrische Ungleichung

$$u^3 \leq 8\pi^2 I$$

für den Affinumfang U von E ; das Gleichheitszeichen gilt nur für Ellipsen.

Nach BRUNN-MINKOWSKI ist andererseits

$$M^2 \geq 4I \cdot I(\eta),$$

sodass schliesslich aus beiden Ungleichungen folgt:

$$(4) \quad I(\eta) \leq I^{-1} \pi^{\frac{4}{3}},$$

wobei das Gleichheitszeichen wie in den vorstehenden Ungleichungen für Ellipsen charakteristisch ist.

Man kann (4) so aussprechen:

Satz: Unter allen zum Einheitskreis flächengleichen Eibereichen liefern nur die Ellipsen das Maximum π des Flächeninhalts für ihr Affinkrumbild.

(38) Im folgenden soll der Satz⁽¹⁾ I von WALSH mit Hilfe⁽²⁾ der pentasphärischen Koordinaten bewiesen werden.

Mit gleichen Zeichen wie bei WALSH können wir beweisen :

$$\begin{aligned} & \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_4)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_1)} \\ &= \frac{\{[(zc_1)c_1 - z] - [(zc_2)c_2 - z]\} \{[(zc_1)c_1 - z] - [(zc_4)c_4 - z]\}}{\{[(zc_2)c_2 - z] - [(zc_1)c_1 - z]\} \{[(zc_4)c_4 - z] - [(zc_1)c_1 - z]\}} \\ &= \frac{\{(zc_1)c_1 - (zc_2)c_2\} \{(zc_1)c_1 - (zc_4)c_4\}}{\{(zc_2)c_2 - (zc_1)c_1\} \{(zc_4)c_4 - (zc_1)c_1\}} = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_4)}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_1)} \\ \therefore \quad & ((zc_1)c_1 - (zc_2)c_2, (a_2 - a_1)) = (zc_2)(c_2a_2), \\ & ((zc_1)c_1 - (zc_4)c_4, (a_4 - a_1)) = (zc_4)(c_4a_4), \\ & ((zc_2)c_2 - (zc_1)c_1, (a_1 - a_2)) = (zc_2)(c_2a_2), \\ & ((zc_4)c_4 - (zc_1)c_1, (a_1 - a_4)) = (zc_4)(c_4a_4), \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} (a_j c_i) &= 0 \text{ für } j \neq i \\ (a_j c_i) &\neq 0 \text{ für } j = i \quad \text{ sind} \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Mit gleichen Methoden kann man der Satz von OGURA⁽³⁾ und BADORFF beweisen.⁽⁴⁾

Nächst, betrachten wir

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = \text{const.},$$

dann bedeutet (1) zwei Systeme von Flächen, wobei

$$x = \xi^I, \quad y = \xi^{II}, \quad z = \xi^{III}$$

- (1) WALSH, J. L.: A theorem on cross-ratios in the geometry of inversion, *Annals of Mathematics* (1923) Vol. 23, p. 45.
- (2) Über konforme Geometrie II, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, IV (1925) S. 122, besonder (15).
- (3) Vergl. NAKAJIMA, S.: Einige Probleme der Geometrie, *Tōkyō Buturigakkō-Zasshi* Vol. 486 (1932) p. 219.
- (4) Badorff, M.: Beiträge zur Geometrie des Kreises und der Kugel, *Beilage zum Programm des Großherzoglichen. Gymnasiums in Baden* (1876-77)

Aus (1) folgt

$$(2) \quad d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0.$$

Ist die PFAFF'sche Gleichung

$$(3) \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

in der X, Y, Z Funktionen von x, y, z bedeuten, lässt sich dann und nur dann auf die Form bringen

$$(4) \quad d\varphi = 0,$$

wenn die Idensität :

$$(5) \quad X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) \equiv 0.$$

(5) ist die Bedingung dafür dass (3) zwei Systeme von Flächen darstellen.

THE ACTIVATION OF AIR BY THE ELECTRODELESS RING DISCHARGE

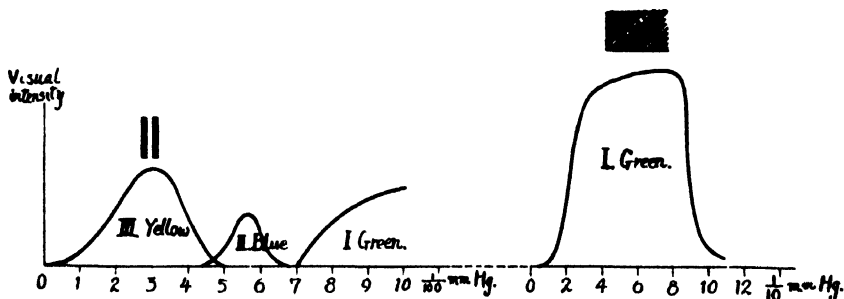
(With 3 Plates and 10 Text-Figures)

B. ARAKATSU and K. KIMURA

(Accepted for publication, Nov. 10, 1932)

On studying experimentally the activation of nitrogen and oxygen we observed a series of interesting phenomena by employing, as previously,⁽¹⁾ a method of electrodeless ring discharge to a bulb of large diameter containing a quantity of residual air of relatively low pressure. Three distinctly different views of after-glow were observed, namely, a green after-glow, in the range of pressure between 1 and 0.07 mm.; a sky blue after-glow, between 0.07 and 0.05 mm.: and, lastly, an orange after-glow, at a pressure lower than 0.05 mm. of mercury (Fig. 1). Of the experimental results, those which are mainly described in the present

Fig. 1



(1) B. ARAKATSU, Y. OTA and K. KIMURA, Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., 5: No. 1, (1932).

B. ARAKATSU and K. KIMURA, Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., 5: No. 2, (1932).

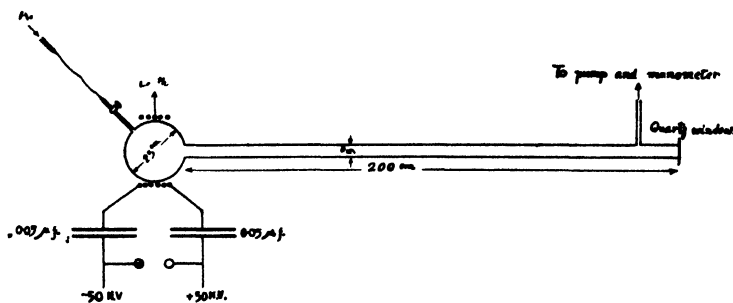
[Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V. No. 4, November, 1932.]

communication concern the production of NO and its beautiful long-continued after-glow.

At first the same apparatus and procedure which had been constructed and employed for the study of the phenomena of the electrodeless ring discharge through hydrogen⁽¹⁾ was used for this purpose. No specially interesting thing, however, was observed except that the aspect of the glowing column quite resembled the case of hydrogen, being strongly affected by the presence of the small quantity of hydrogen (probably as water vapour) in the discharge tube, provided that the air was introduced from one end of the tube without passing any eliminating devise. Since it was noticed afterwards that, by means of this method, the excitation of gases in such a narrow tube was too strong for the observation of some delicate molecular interactions there, the discharge tube was replaced by another one of larger dimensions.

After a series of experiments, a large bulb of about 25 cms in diameter was finally selected to be used. It was wound, as usual, with

Fig. 2



a thick aluminium wire in three to seven turns, through which the condensed discharge was made by a spark gap corresponding to a potential difference of about 100 K. V. (Fig. 2).

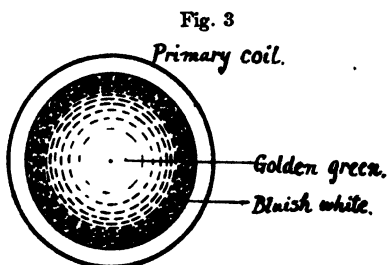
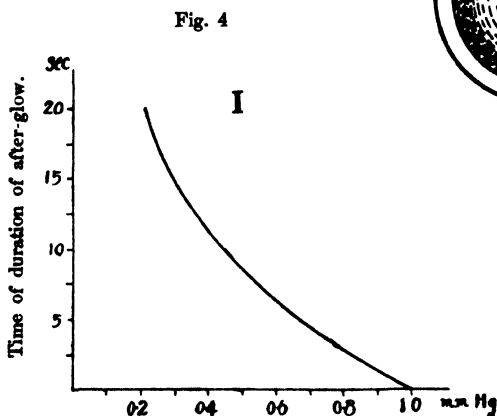
(1) B. ARAKATSU, Y. OTA and K. KIMURA, Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., 5: No. 1, (1932).

B. ARAKATSU and K. KIMURA, Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ. 5: No. 2, 1932.

I. The Green Afterglow

As long as the pressure of gas is higher than 2 mms. of Mercury, no glow is induced in the bulb by the condensed discharge through the "primary" coil, but it then begins abruptly to glow dull red along the inner wall of the bulb at the instance of the spark discharge. Meanwhile, as the "vacuum" proceeds (at about 1 mm. of mercury), the glowing ring becomes broader and changes its colour to bluish-white along the outer rim and golden-green in the centre of the "ring" (Fig. 3) (Pl. I). It is then followed by a strong (somewhat milky) green afterglow.

The spectrum of this after-glow is a continuous one developed from yellow to the limit of visible violet. It remains visible about 30 seconds



or more after each of the ring discharges. The duration of this glow varies for different pressures of the gas as is shown in Fig. 4.

The visual intensity of the after-glow varies

with the lapse of time in a manner as illustrated in Fig. 5. It follows closely the primary glow and remains at first with a relatively uniform brightness and then becomes extinct fairly rapidly. The intensity of the after-glow is independent of the number and the rate of the discharge, but it seems

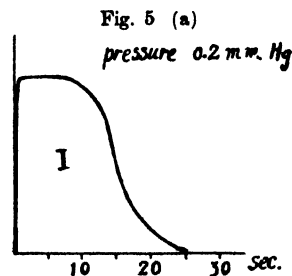
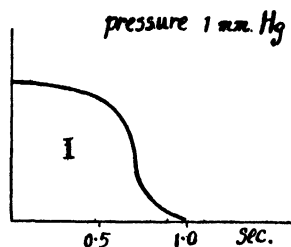


Fig. 5 (b)



dependent only on the conditions of each of the single discharges. The glowing substance must thus be excited by a single discharge: it does not have to be accumulated by frequent discharges.

There are numberless descriptions of the afterglow of this colour in the ordinary active nitrogen discharge tube⁽¹⁾ though it has not yet been satisfactorily investigated. It was considered by many writers that this after-glow is originated from O_2 or O_3 and NO. As far as the present writer's experiments are concerned, this after-glow seems to be caused by the formation of O_3 from O_2 and O, which is produced by the primary discharge. It does not seem to be related to NO, since on one hand the same phenomena can be strongly observed in a bulb which is carefully filled with dry oxygen obtained by electrolysis and on the other the after-glow due to NO, which is produced by the discharge, is, as is described in a later section, of quite a different type. Though the catalytic effects of foreign gases, which may be present as impurities, are naturally conceivable, the main things seem, thus, to be due to oxygen itself.

It is interesting to note here that the after-glow propagates into the connecting tube (of about 5 cms. in diameter and 200 cms. in length) with a finite velocity.

The velocity of the diffusion of this after-glow varies for the different amounts of pressure of the glowing gas. It takes about two seconds to reach the end of the connecting tube propagating 2 metres through gas of a pressure of about 0.2 mms. of mercury. If the discharges are made

(1) Among them, the following is the literature on air after-glow.

E. P. LEWIS, *Ann. d. Phys.* 4 : 2, 459 (1900).

R. J. STRUTT, *Proc. Phys. Soc.*, 23 : 66 (1911).

G. HERZBERG, *Zeits. f. Phys.*, 46 : 878 (1927).

J. KAPLAN, *Proc. Nat. Acad. Sciences*, 14 : 258 (1918). *Phys. Rev.* 35 : 600 (1930)

Among others, Rayleigh's works are here noted.

R. J. STRUTT, *Proc. Roy. Soc. Lond.* 85 : 219 (1911) 86. pp. 56 : 105, 262, 529; (1912) 87 : pp. 179, 302, 381; 88 : pp. 110, 539. (1913).

R. J. STRUTT and A. FOWLER, *Proc. Roy. Soc.* 85 : 377 (1911); 86 : 105 (1912). Lord Rayleigh, 102 : 453 (1923).

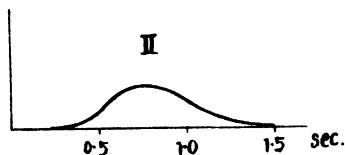
about one or two per second the heads of the after-glow advance in a series in the connecting tube. This phenomenon is probably due to the diffusion of the oxygen atom, which is produced in the coiled part of the bulb, into the connecting tube combining into O_3 with the O_2 which lies there, but not to the direct diffusion of the glowing substance, since it is the head which glows most intensely. If so, it may be a direct method of observing the diffusion, as well as the mean life, of the oxygen atom under low pressure.

II. The Sky-Blue After-glow

This green continuous after-glow can be observed down to a pressure of 0.07 mm. of Hg. but no farther. If we continue, however, to lower the pressure and to make the discharge at a proper rate, there appears then another very beautiful (somewhat milky) sky-blue after-glow of a relatively short life (of about 10 sec.). This blue after-glow can be observed for a narrow limited range of the pressure of the glowing gas, namely between 0.07 and 0.05 mm. of Hg.

The characteristic feature of this after-glow is that its maximum intensity comes about 0.7 second after each of the "primary" glows of the discharge (Fig. 6). This is not due to the effect of fatigue on our visual sensation. We close our eyes waiting to hear the sound of the discharge when it occurs and then open our eyes to observe the after-glow. The visual intensity of this glow may be diagrammatically shown as in Fig. 6. The blue after-glow can hardly be observed even when the "vacuum" first reaches the region above mentioned, unless the intermittent discharges are simultaneously continued from the stage of the green after-glow. This seems not only due to the limited range of pressures at which it appears but also probably to the fact that the glowing substance is produced by each of the excitations (at the instance of the "primary" discharge or thereafter) and may integrate itself to the

Fig. 6.



proper amount at which it can be detected glowing later.

Since this after-glow is of very short life, it is fairly difficult to study it in detail, but it can surely be said that the appearance of this blue after-glow is closely related to the appearance of the following yellow after-glow, or the latter can only be strongly observed when the condition is favourable to the former.⁽¹⁾

III. The Yellow After-glow

The blue after-glow no longer appears at a pressure lower than 0.05 mm. while another beautiful one of mild orange colour, whose life is longer than 2 minutes, begins to appear from this pressure and is perceptible even at a pressure lower than 0.01 mm. having the optimum pressure at 0.02 mm. of mercury.

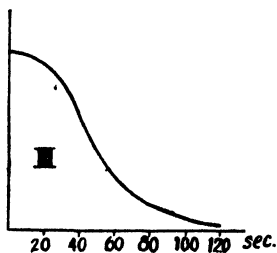
As is already stated this orange after-glow takes place intensely only when the intermittent primary discharges are continually made throughout the last stage of the green after-glow, (which is, independent of its history, strongly observed by a single discharge under the proper conditions).

Unlike the green after-glow, the orange one, up to a limiting intensity, becomes integrally stronger with the number of the intermittent (1 per 2 seconds) primary discharges.

One can scarcely observe the diffusion of this glow into the connecting tube, with a finite (visually measurable) speed but it glows (even

in the far end of the tube) almost at once with the primary discharge. The sight of the glowing tube is very marvellous (Pl. I), the orange column, 200 cm. long with a large bulb, stands glowing. The change of the visual intensity is about as illustrated in Fig. 7. It fades gradually with time, but not so abruptly as in the case of the green after-glow; it has no

Fig. 7

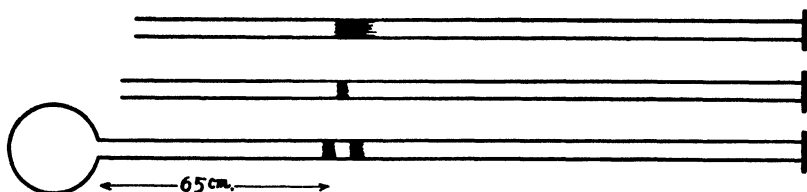


(1) As is described in the following section, this blue after-glow must actually be due to the so-called β -Band of NO.

maximum as in the case of the blue one.

When the pressure reaches about 0.02 mm. (the optimum pressure) there appears one or two distinct nodes of intense after-glow in a tube at a distance of about one-third of its whole length from the bulb neck. The node displaces itself a little with pressure, but it lies in the same position for the same pressure. It looks as if some particles (which cause the after-glow) are ejected from the side of the bulb at the instance of

Fig. 8



the primary discharge. If we, after having excited the glow under good conditions, cut off all the electricity for this experiment, the above mentioned intense node spreads away sometimes rapidly and at other times relatively slowly over the whole space in the tube.

We take it, then, as the accumulation of some positive (or negative) ions which are driven by the electrical field set up in the bulb part. But a positive ray of such long range in the order of this pressure is not acknowledged as existing, since we know that even the positive ray of hydrogen runs at most about 25 cms. in a similar condition⁽¹⁾ and, moreover, the phenomena are quite independent of the angle of the orientation of the coil relative to the direction of the connecting tube. In order to test if the node is an accumulation of some ions, an electrical field was applied to it from the outside of the tube but it failed. Since it may be considered that a stream of electrons ejected from the bulb part arrive at this point, a horse shoe magnet was applied but it was not effective. The mere heating of the tube by a Bunsen burner has also no effect. The inner surface of the glass tube was detected afterwards to have remarkably deteriorated in this part.

(1) B. ARAKATSU and K. KIMURA, Mem. of the Fac. of Sci. & Agr., Taihoku Imp. Univ., 5 : No. 2, (1932).

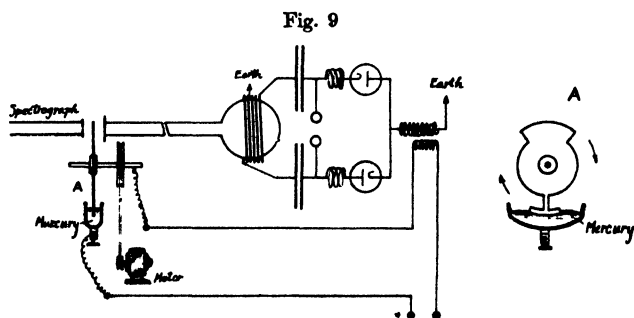
On the other hand, this after-glow is sometimes very sensitive to some electrical agitations; for example, the mere operation of making the electrical circuit charge up the condensor sometime causes the glow to be instantaneously extinguished.

At any rate, the glowing substance itself does not seem to be an ion, but is influenced by an ion of some kind. It is to be remarked here that the molecules O_2 and NO , which exhibit the strong after-glow, are molecules which are easily possessed of a negative charge.⁽¹⁾

The compression of this glowing gas causes it to flash out with great brilliance and to decay more rapidly. This indicates that the glowing phenomena are not due to a monomolecular reaction, but are probably due to some polymolecular processes. If a small quantity of air be abruptly introduced into the glowing bulb, the glowing substance is pushed into the connecting tube running through and it becomes very brilliant for an instance at the far end of the tube and soon disappears.

The observation of this glow with a small hand spectroscope made it clear that it was nothing but the ordinary α -band of N_2 , namely, three groups of diffuse lines of red, yellow and green respectively. It was then examined in order to take a photograph of the whole spectrum of this glow with a small quartz spectrograph. In order to avoid the entering of the light from the primary glow into the spectrograph, a revolving switch with a small sector was specially constructed and inserted in

the primary of the transformer (Fig. 9). The speed of revolution was so adjusted that one or two sparks were made during the time the



(1) M. ISHINO and B. ARAKATSU, Mem. of College of Sci., Kyoto Imp. Univ., 4: No. 7, 355 (1921).

arm of the sector contacts with the mercury cup, which is a terminal of the switch, and that the sector before the slit of the spectrograph be cleared in half a second or one, after the contact was broken.

The spectrum thus taken is, as shown in Pl. II., the so-called third positive band of nitrogen (γ -band) which is now accepted by spectroscopists as really due to NO. This photograph is, as far as we know, the first one of the air glow published. As is seen on the plate, the visible part of the spectrum (the α -band), by which the after-glow was actually detected, is negligibly feeble compared with that of the ultra-violet region, (γ -band). (The β -band is scarcely observed in this case.) It had to be a very brilliant after-glow if our visual sensation could perceive the light of this region. The spectrum emitted at the instance of the primary discharge is shown on the plate for comparison. The intense band excited in the primary discharge disappears wholly in the after-glow.

Each of the lines belonging to the after-glow is remarkably diffused compared with that of the primary one. This indicates that the conditions of emitting this spectrum are different for the two cases. The diffuse spectrum due to the after-glow is thus emitted either by a molecule that lies in a field of another molecule or by a molecule in motion with a relatively high speed, (which is probably imparted by the collision that causes this very after-glow.) The mercury line λ 2536 is, on the other hand, sharply excited in the after-glow.⁽¹⁾

Thus we see that the mild yellow colour of this after-glow is the α -band of N_2 while the main part of the glow is actually the γ -band whose spectrum lies in the ultra violet region. The blue after-glow which necessarily precedes the yellow one is now to be acknowledged as the β -band.⁽²⁾ It is very curious that the γ - and β -bands should appear thus separately at different stages. It may perhaps be that the γ -band was also actually emitted as the main one at the stage of the blue glow, as well as at that of the yellow one, and that the apparently different colour of the two after-glows comes, then, merely from the difference of

(1) See J. OKUBO and H. HAMADA, *Phil. Mag.* **1**: 372 (1928).

(2) F. A. JENKINS, H. A. BARTON and R. S. MULLIKEN. *Phys. Rev.* **30**: 154 (1927).

the subordinate weak (in comparison with the ultraviolet γ -band) after-glow of the α -(N_2) and β -(NO) bands respectively. Since, as is stated in the previous section, the stage of the blue after-glow is fairly difficult to observe in detail, one cannot discuss this subject further unless more detailed experimental observations are made.

The photometric curve of the band spectra of the "yellow after-glow" is shown in Pl. III. Though the complicity of the sensitivity of the photographic plate to light and the characteristics of the measuring instrument makes it difficult to be accurate a rough estimation of the relative intensity of each of the bands corresponding to the different vibrations is made by measuring the area of each of the peaks (Table I). As one sees in Fig. 10 the observed intensity distribution is in fairly good agreement with the value calculated by the Condon theory.⁽¹⁾

Fig 10.

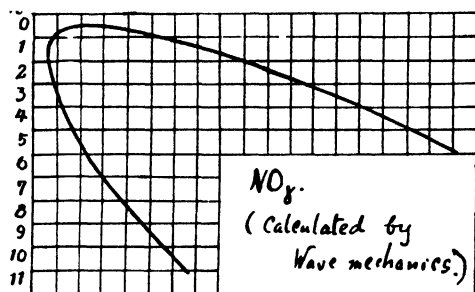


Table I.

Relative intensity of (n' n'').

n' \ n''									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	5	9	10	10	9	4	3	2	1
1	2	4							

(NO γ Band)

B. Arakatsu and K. Kimura.

From R. Schmid, and others ZS. f. Phys., 64, 119, (1930)

IV. Reflections (a)

While the condensed discharge method was usually employed by most of the writers on active nitrogen and oxygen, the electrodeless ring discharge has been used by very few.⁽²⁾

- (1) B. POGONY and R. SCHMID, ZS. f. Phys. 49 : 162 (1928).
 B. POGONY and R. SCHMID, ZS. f. Phys. 54 : 779 (1929).
 R. SCHMID, ZS. f. Phys. 59 : 850 (1930).
 E. L. HILL and J. H. van VLECK, Phys. Rev. 32 : 250 (1928).
 J. H. van VLECK, Phys. Rev. 33 : 467 (1929).
- (2) G. HERZBERG, Ann. d. Phys. 84 : 553, 565 (1927) ZS. f. Phys. 46 : 878 (1928) ; 49 : 512 (1928).

The phenomena of activation were generally observed, by these writers, for gases of relatively high pressure, namely, sometimes of cms, of mms, and others of some tenth mms⁽¹⁾ of Hg. As is mentioned above, the phenomena observed by the present writers commence to take place at a pressure of 1 mm. and can be observed down to a pressure lower than 0.01 mm. of Hg. It is, thus, evident that the state of activation is not conditioned alone by the pressures of the gas under operation, but it depends rather on the methods of excitation, the pressure has naturally an influence on it in each case respectively.

The substance glowing green is suspected by the present writers to be the combining O_3 from O_2 and O , since we know on one side that a considerable amount of O_3 was detected in the glowing tube by many previous observers and on the other that the ozone gas is produced in oxygen gas a hundred percent if we decompose a molecule O_2 therein into $O+O$ by proper quantum radiations (Warburg's Experiment).

Nevertheless, this glow is considered by some writers⁽²⁾ to be an monomolecular reaction. This idea cannot, however, interpret in a simplified way, the decay curve of the visual intensity illustrated in Fig. 5. The glowing substance should according to this view, obey some complicated law of reactions. The doubt of the direct influence of NO on the green after-glow ($NO+O_3=NO_2+O_2$) is based, besides on the facts described in the previous section, on the fact that while the β and γ band after-glow due to NO become integratively brilliant by the frequent application of discharges, the green after-glow is quite independent of it. A single discharge is always sufficient to make it glow at the maximum intensity. Had NO some direct relation to it, it would have increased integratively to the maximum in its intensity with the number of discharges in a way similar to that in the case of the blue, as well as the yellow, after-glow, since the glowing substance is considered probably to be integratively produced by the discharge in the latter cases.

- (1) I. KAPLAN, [Phys. Rev. **35** : 600 (1930)] has reported that 0.5 mm. has been found to be the best pressure for the production of the after-glow in air.
- (2) MARIA MAJEWSKA, ZS. f. Phys. **50** : 372 (1928).

V. Reflection (b)

The characteristic feature of the change of the visual intensity of the blue afterglow with the lapse of time after each of the primary discharges (Fig. 6) seems to be a standard type of phenomena of this kind.

According to the conception of the present writers the glowing substance (or substances related to give rise to the glow) forms itself at this state. The primary discharge causes the molecules O_2 and N_2 to split up into their component atom's O and N respectively, the metastable \tilde{N}_2 molecule may, also, be produced at once. Some of the atoms may stay in a metastable state, say \tilde{N} , and some others in their normal ground one. They recombine, then, into O_2 , O , N , \tilde{N}_2 or NO, respectively, at the end of their life, which is naturally considered to be relatively long. The glowing process may take place by an inelastic collision between some of them. If one of the colliding substance be at least that one which is newly produced by the above mentioned processes, say NO, that collision process, which may naturally occur with the probability proportional to the number of the substance, has once its maximum in frequency and then decays to the vanishing occurrence, giving rise to the glow curve illustrated in Fig. 6.

KAPLAN⁽¹⁾ puts forward the conception that the β band appearing in the air after-glow in his experiment is the recombination spectrum of NO, since the energy necessary for the excitation of the $^2//$ level from the the normal state of the molecule is 5.65 volts, while the energy of recombination of NO is believed to be about 6.6 volts. If this is the case, the time required for the maximum visual intensity (0.7 sec.) is taken as the mean life of O and N, respectively, in this state. But this interpretation is fairly difficult for other complicated features appear in the present experiment.

It is here that we should turn our minds to the ideas of the numerous former investigators on the mechanism of the after-glow and the active nitrogen phenomena.⁽²⁾

(1) J. KAPLAN, *Phys. Rev.* **35** : 608 (1930).

(2) O. KLEIN and S. ROSELAND, *ZS. f. Phys.* **4** : 46 (1921).

J. FRANCK, *ZS. f. Phys.* **9** : 259 (1922).

M. N. SAHA and N. K. SUR, *Phil. Mag.* **48** : 421 (1924).

(a) According to the theory of the yellow after-glow proposed by SPONER,⁽¹⁾ two normal nitrogen atoms collide in a triple collision with a normal nitrogen molecule resulting in the formation of one normal nitrogen molecule and one excited molecule. $N + N + N_2 = N_2 + \tilde{N}_2$ (Excited). The glowing substance is known to be an excited molecule with about 11.5 volts energy. The dissociation energy of the N_2 molecule was then believed by her to be 11.5 volts and the theory was acknowledged to be satisfactory. On this theory the chemical activity would, therefore, be attributed to the nitrogen atoms in their ground state. These conceptions were favoured by some writers and refuted by others with a number of experimental facts⁽²⁾. However, since it has been shown that the dissociation energy of N_2 is about 9.0 volts⁽³⁾ and not 11.5 volts, as supposed by Sponer, the theory is necessarily abandoned.

(b) CARIO and KAPLAN⁽⁴⁾ supposed that the 11.5 volt excited molecules of the yellow after-glow are produced by the interaction between a metastable nitrogen molecule in the 3Σ state (8 volts) and a metastable nitrogen atom⁽⁵⁾ in the $2P$ state (3.5 volts). The chemical activity of active nitrogen will according to this view, be due to the metastable atoms. Evidence of the presence of metastable atoms of nitrogen in the $2P\frac{1}{2}$ state in an active nitrogen tube was observed by JACKSON and BROADWAY.⁽⁶⁾

(c) Now, under the condition of soft excitation of the present experiment, as is also seen from the spectrum of the primary discharge (Pl. II, a), a great number of the metastable molecules may easily be

(1) H. SPONER, *ZS. f. Phys.* **34** : 622 (1925).

(2) See, for example K. F. BONHOEFFER and G. KAMINSKY, *ZS. f. Physikalische Chemie* **127** : 385 (1927).

(3) R. BIRGE, *Nature* **122** : 842 (1928).

J. KAPLAN, *Proc. Nat. Acad.*, **15** : 226 ; T. Faraday soc., **25** : 713 (1929).

L. A. TURNER and E. W. SAMSON, *Phys. Rev.* **34** : 747 (1929).

T. TATE and W. LOZIER, *Phys. Rev.*, **39** : 254 (1932).

A. K. DATTA, *Nature*, **129** : 870 (1932).

T. C. SUTTON, *Nature*, **130** : 132 (1932).

(4) G. CARIO and J. KAPLAN, *ZS. f. Phys.*, **58** : 769 (1929).

(5) K. T. COMPTON and J. C. BOYCE, *Phys. Rev.* **33** : 145 (1929).

(6) L. C. JACKSON and L. F. BROADWAY, *Proc. Roy. Soc. A.* **127** : 678 (1930).

produced, while the nitrogen in a atomic state (especially in a excited state) is considered to be produced in a relatively small quantity. The intensity of the yellow after-glow (α -band) in our experiment is solely conditioned by the number of the metastable \tilde{N} atoms, which are integratedly accumulated by the frequent discharges. This statement is quite adequate for the interpretation of the facts that the yellow glow is relatively feeble and that its intensity increases integratedly to reach a maximum with the number of the discharges. CARIO and KAPLAN's theory is, thus, very convenient in interpreting the phenomena of the present experiment.

(d) What, then, has this theory to do with the NO (β and γ) bands. As is mentioned in the previous section, the β band was interpreted by KAPLAN as the recombination spectrum of NO. Since our observation is not yet as completely done with the β band as it is with the γ one, we may avoid a discussion on the former here. The fact that the γ (third positive) band due to NO appears in the present experiment at the stage of the "yellow after-glow" with a strikingly greater intensity than the α band simultaneously observed, shows us, however, that the following interpretation is more favourable than the recombination theory which might be proposed for the origin of the γ -band.

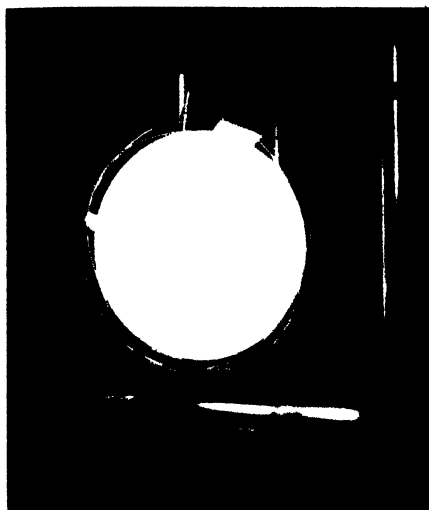
As is described in the previous section, the normal NO molecules are first produced by the discharge. Some of them collide, then, with a metastable molecule (\tilde{N}_2) in the 3Σ state (8 volts) with the resultant formation of a nitrogen molecule in the ground level and an excited NO molecule in the A ($^2\Sigma$) state (5.5 volts) of the relatively higher vibrational state, which glows, at once, by settling itself in the normal state (X) ($^2\Pi$). The excess energy is imparted at the same time to the molecules as the form of their kinetic energy which disturbs the sharpness of the spectrum. This interpretation seems to be plausible. Indeed, in spite of the feeble intensity of the α -band, the γ -one is strikingly strong because the number of the \tilde{N} metastable atoms may be accounted very small compared with that of NO molecules and \tilde{N}_2 metastable molecules.

These interpretations are also in good agreement with those done in

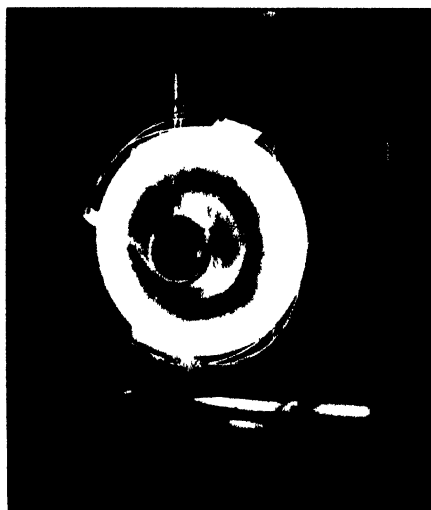
the previous section for the characteristic feature of the blue after-glow, and with that for the aspects of the yellow after-glow.

The activity of active nitrogen will be due, according to this view, to both the metastable atoms as well as to the metastable molecules.

The writers are greatly indebted to Professor M. KIMURA and Dr. UCHIDA of the Department of Physics at Kyoto Imperial University for permission to use the micro-photometer, also for the interest shown and the help afforded by them during the measurements.



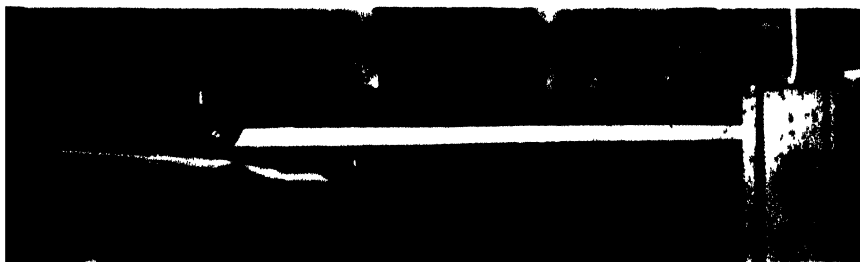
Primary discharge 0.001 mm Hg



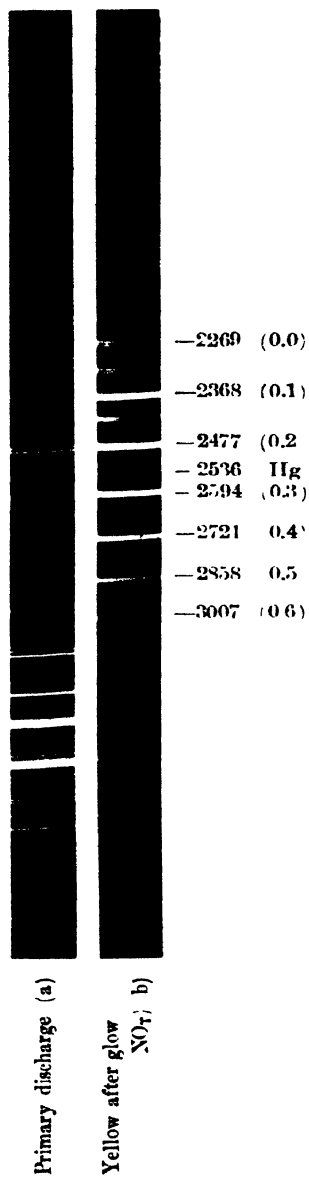
Primary discharge 0.8 mm Hg



Green after glow 0.3 mm Hg



Yellow after glow 0.02 mm Hg





THE ELECTRODELESS RING DISCHARGE THROUGH POTASSIUM VAPOUR

(With 1 Plate and 1 Text-Figure)

B. ARAKATSU and Y. UEMURA

(Accepted for publication, Nov. 10, 1932)

One of the present writers has⁽¹⁾ previously reported on the peculiar phenomena of the electrodeless ring discharge through hydrogen in a long tube and also on the recombination spectrum of hydrogen atoms. The long, glowing column extending about 50 cms, especially the one developed outside the coiled part, has been considered to be due to the positive rays of the neutralising hydrogen atoms expelled from the coiled part, but not to the excitation by the bombardment of swift electrons on the hydrogen molecule there, nor to the direct excitation by the rapid variation of the stray magnetic field due to the primary discharge.

Now the present experiment was, at first, commenced with the aim of observing the continuous spectrum "at the series limit" of the arc lines of potassium vapour. Though it quite failed for this purpose, an unexpected and interesting result was obtained which supports not only our previous interpretations of the phenomena mentioned above but also our idea on the mechanism of the recombination of an electron with a proton given at that time.

A pyrex glass tube of about 3 cms in diameter was sealed at one end. The potassium was vapourised in the tube by an electric furnace of about 300°C. (Text-Fig. 1). The electrodeless ring discharge was

(1) B. ARAKATSU and K. KIMURA, 5: No. 2. of the Memoirs of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan.

B. ARAKATSU, Y. Ota and K. KIMURA. 5: No. 1. of the same Memoirs.

[Mem. of the Fac. of Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. 5: No. 4 November, 1932.]

made through the metal vapour in the usual way. The density of the metal vapour was adjusted by controlling the temperature of the furnace so that the glowing column of potassium was well extended about 7 cms. outside the "primary" coil. The colour of the glowing column was blue violet, somewhat dark. The metal was deposited on the inner wall of the tube near the end of the glowing column.

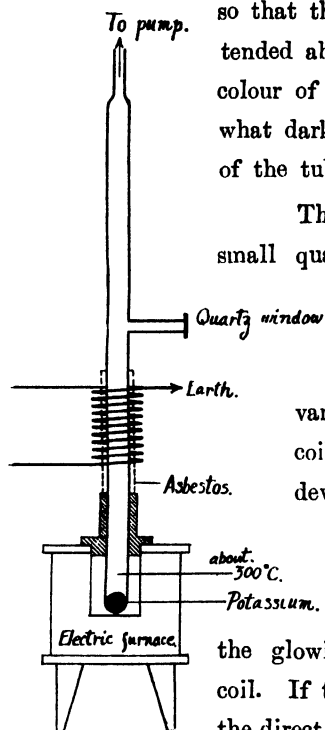


Fig. 1.

happen that the arc line of the metal be emitted. It is evident that there is no neutralising process taking place in the glowing column 7 cm. long and no condition for emitting its arc spectrum.

The neutralisation of the potassium ions probably takes place only on condensing to the solid state on the wall of the tube.

These facts confirm our opinions on the process of the development of the glowing column—that it is nothing but the positive ions of atoms expelled from the coiled part by the electrostatic field set up between the ends of the coil at the instant of the excitations of the ring discharge.

Moreover, as one of the present writers has also previously concluded on the mechanism of the recombination of an electron with a proton, the neutralisation of the potassium ions seems thus also very difficult

unless the ions are not free from the disturbance of the field due to the neighbouring atoms or molecules, which causes the establishment of the continuous region in the neutralising atom.

Since, in the case of the present experiment, the pressure due to impurities seems to be negligibly small (no trace of hydrogen was even observed) and the intra-atomic complications take place merely among the potassium atoms themselves, one may think of the lack of the electrons necessary to recombine with the positive ions. It is, however, much preferable to conclude that the ions are in this case fairly free from the influences of other ones and can not constitute in themselves the continuous region, which is necessary for inducing the resonance beat of the ions with the coming electrons with an arbitrary amount of kinetic energy which results in the production of the atoms in the neutralising states that give rise to the arc spectrum, accompanied by the continuous one at the "series limit". The ions are able to catch the electrons easily at the wall or on the surface of the metal, adhering to it and constituting a part of the liquid or solid substances there, since these have a wide range of the continuous region in themselves.



THE RING DISCHARGE SPECTRUM OF POTASSIUM VAPOUR.

ON THE ANOMALOUS ABSORPTION OF γ -RAYS.

(The Possibility of the Quantum Jump of the
Rest-mass of an Electron.)

By

B. ARAKATSU

Accepted for publication December 8, 1932

The investigations of TARRANT, CHAO, MEITNER and HUPFELD, and of JACOBSEN¹⁾ on the validity of the "KLEIN-NISHINA formula"²⁾ in the case of the absorption of hard γ -rays in various matters, show that, while the absorption-coefficients of the lighter elements fit well with the formula, those for the heavier elements are much greater than those predicted by it, and the additional absorption increases fairly rapidly with the "charge number".

No satisfactory theory is given at present at all. But the conceptions of most of the authors agree in accepting its origin as to be ascribed to the nuclei. BECK, as well as GAMOW³⁾ failed in interpreting this anomaly by assuming that the active particles are α -particles in nuclei and that the methods of wave mechanics are applicable to the nuclear configuration as in the case of the outer electrons.

BRAMELEY⁴⁾ has recently pointed out that a linear relation exists between the experimental values of the additional absorption per atom and the number of "loose electrons" (N_e) in the nuclei: namely,

$$\mu_A - \sigma_{A(KN)} = 1.89 \times 10^{-25} N_e.$$

whereas the theoretical formula deduced by him gives

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Formosa Japan, Vol. V. No. 5. December, 1932.]

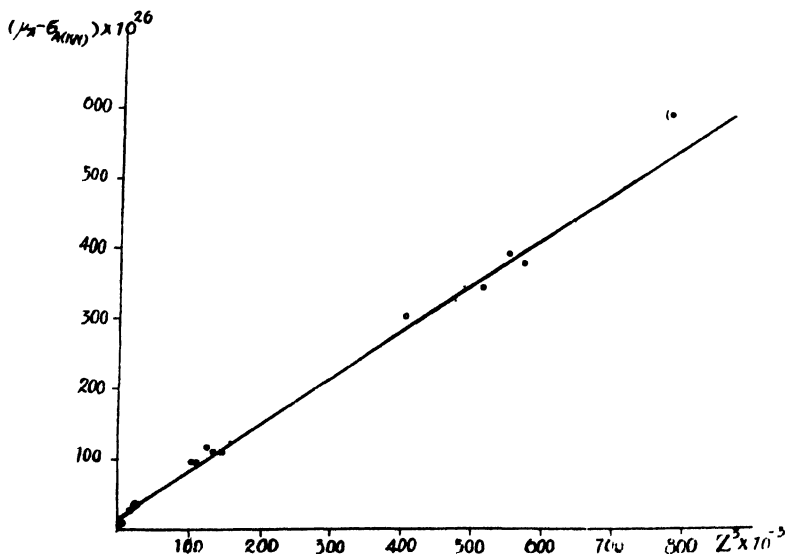
$$\mu_A - \sigma_{A(KN)} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 C^4} N \epsilon.$$

$$= 6.63 \times 10^{-27} N \epsilon.$$

In their latest investigations, GRAY and TARRANT⁵⁾ have discovered the characteristic fluorescent radiations containing two different components of the energy which correspond to about 0.5 and 1.0 million electron-volts respectively. In all of the elements on which they experimented (Pb. Sn. Fe and O), these secondary radiations are generally excited independently of the quantum energy of the primary radiation, as long as these elements are irradiated by the γ -rays presumably harder than that of the 1.8 million electron volts.*

Now, in the present communication, the writer gives a short description of his attempt to deduce the formula of the additional absorption, taking an entirely new stand.

Fig. 1.)



* Here, it is to be noticed that the energy corresponding to half million volt is just about the energy of the "rest-mass" of an electron m_0 , for
 10^6 Electron Volts = 1.59×10^{-6} erg
 and $m C^2 = 0.814 \times 10^{-6}$ erg.

If the experimental values* of the additional absorption coefficient per atom are plotted against the cube of the charge number, they fall, as is shown in the annexed figure (Fig. 1), nearly on a straight line which is expressed by

$$\mu_A - \sigma_{A(KN)} = 6.75 \times 10^{-30} Z^3.$$

It seems, then, to the present writer very probable that the active particles in this case are outer electrons of the atom.

Imagine that an electron is a wave mechanical configuration system of something like a two dimensional oscillator, and that the energy of the electron in C' is nothing but the very energy of oscillation corresponding to the ground quantum state, thus $m_e C'^2 = h\nu$, where ν is the characteristic frequency of this oscillator.

This oscillator-electron or a system of these oscillator-electrons is taken to be then quantumly excited by some special causes to one of the states corresponding to various n^{th} oscillations which carries the energy $(n+1) h\nu$ or $(n+1) m_e C'^2$.

We assume that the phenomena of the anomalous absorption of hard γ -rays and the phenomena of the fluorescent radiations of GRAY and TARRANT's experiment¹⁾ are due to the quantum jump of the energy of such an oscillator-electron or a system of these oscillator-electrons, and moreover that such a system is constituted by that part of the "outer electrons" of the atom which surrounds the nucleus in a radial distance (r) smaller than the half wave length $\frac{\lambda}{2}$ of the wave due to the characteristic oscillation of an oscillator-electron, thus

$$\lambda = \frac{C}{\nu} = \frac{h}{m_e C'} \div 2.42 \times 10^{-10} \text{cm.}$$

Then the absorption coefficient per atom due to this process of the outer electrons is given by the expression,

$$\mu_{A(\gamma)} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{64\pi^4}{C^3} \left[\sum_n \frac{(E_n - E_0)^2 |a_n|^2}{(E_n - E_c)^2 + h^2 \nu^2} \right]^2$$

* The experimental values are taken from the Table V. of G. T. P. TERRANT's work. Proc. Roy. Soc., A. 135, 233 (1932).

where ν is the frequency of the primary radiation and $(E_n - E_0)$, are, by neglecting the change of the energy of the ordinary quantum states, put into $n\nu_0$ under the condition $n\nu_0 < h\nu$. The matrix elements $|a_{on}|^2$ are calculated out by assuming that the effective number of the acting oscillator-electrons for the excitation from o^{th} to n^{th} oscillation is the number of the outer electrons contained in the sphere of radius $\frac{\lambda_n}{2}$ around the nucleus, so that $|a_{on}|^2$ are given by the expression,

$$|a_{on}|^2 = \frac{h^2 e^2}{8\pi^2 m_0 (E_n - E_0)} \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} \rho_{(r)} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr.$$

and so, the order of the summation and the square in the above formula being presumably changed,[§] we may write it down at ease in the form

$$\mu_{\Lambda(t,o)} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m_0^2 C^4} \sum_n \left[\frac{h^2 \nu^2}{(E_n - E_0)^2 - h^2 \nu^2} \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} \rho_{(r)} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \right]^2$$

in which λ_n means the wave length of the radiation corresponding to the n^{th} harmonics of the primary oscillation of the oscillator-electron, i. e.,

$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{h}{nm_0 C}$, and $\rho_{(r)}$ is the electron density of the outer electrons of the atom at the point r from the centre.

Now, according to THOMAS and FERMI⁽⁶⁾, $\rho_{(r)}$ is given for the heavier elements by the expression

$$\rho_{(r)} = a Z^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \varphi^{\frac{3}{2}}(b \cdot r \cdot Z^{\frac{1}{3}}),$$

where
$$a = \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi m_0^{\frac{3}{2}} e^3}{3 h^3},$$

$$b = \frac{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} m_0 e^2}{3^{\frac{2}{3}} h^2},$$

and the function $\varphi(\xi)$ is the solution of the differential equation

§ This means that each of the quantum perturbations takes place independently for various n^{th} oscillations, i. e., the additional wave function $w_{\pm(n)}(x)$ in each of the perturbed systems may be expressed by the single term $\frac{1}{2} F \cdot \frac{a_{on} u_n(x)}{(E_0 - E_n) \pm h\nu}$.

$$\frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\xi}}$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \\ \text{and} \quad \int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{3}{2}}(\xi) d\xi &= 1. \end{aligned}$$

By using this value, we have

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} \frac{1}{\rho(r)} 4\pi r^2 dr = 4\pi a Z^{\frac{2}{3}} \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} r^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{3}{2}}(b \cdot r \cdot Z^{\frac{1}{3}}) dr \\ &= Z \int_0^{b Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\lambda_n}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{3}{2}}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

in which the variable is changed from r into $\xi = b \cdot r \cdot Z^{\frac{1}{3}}$.

Since the numerical value of $b \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\lambda_n}{2}$ is the order of 0.1–0.01, $\varphi(\xi)$ under the integral takes a value between 1 and, at least, 0.9,⁷⁾ and hence, by taking the mean value,

$$I_n = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} Z^{\frac{3}{2}} \varphi^{\frac{3}{2}}(\xi_n) \left(\frac{\lambda_n}{2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

where $\varphi(\xi_n) \approx 1$ and $\lambda_n = \frac{h}{nm_0 C}$.

Thus we have for the final expression

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda(\gamma_0)} &= \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2}{m \cdot C} \cdot \frac{2^{12} \pi^4 \epsilon^6}{3^4 C^3 h^3} \cdot Z^3 \sum_n \left[\left(\frac{h^2 \nu^2}{(E_n - E_0)^2 - h^2 \nu^2} \right)^2 \frac{\varphi^4(\xi_n)}{n^3} \right] \\ &\approx 5.05 \times 10^{-30} Z \sum_n \left[\left(\frac{h^2 \nu^2}{(n h \nu_0)^2 - h^2 \nu^2} \right)^2 \frac{\varphi^4(\xi_n)}{n^3} \right] \end{aligned}$$

If we take the sum up to $n=4$ by putting

$$h\nu = 4.21 \times 10^{-6} \text{ erg},$$

and $h\nu_c = 0.814 \times 10^{-8}$ erg,

we see the theoretical value approaches satisfactorily to the experimental value mentioned above i. e. to $6.75 \times 10^{-30} Z^3$.

For an infinitely hard radiation we should have, then, the absorption coefficient per atom which is greater than that predicted by KLEIN-NISHINA formula by the amount

$$\mu_{A(z,0)\infty} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 C^4} \cdot \frac{2^{12} \pi^4 e^6}{3^4 C^3 h^3} Z^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \\ \doteq 6.07 \times 10^{-30} Z^3.$$

References.

- 1) G. T. P. TARRANT, Proc. Roy. Soc., A, **128**, 345 (1930); A, **135**, 233 (1932).
C. Y. CHAO, Proc. Nat. Acad. Amer., **16**, 431 (1930), Proc. Roy. Soc. A, **135**, 206 (1932).
- L. MEITNER and H. HUPELID, ZS. f. Phys., **67**, 147 (1931).
- J. JACOBSEN, ZS. f. Phys. **70**, 145 (1931).
- 2) O. KLEIN and Y. NISHINA, ZS. f. Phys. **52**, 853 (1929).
- 3) BECK, Naturwiss., **18**, 896 (1930).
- G. GAMOW, Atom. Nuclei and Radioact., Oxford, (1931).
- 4) A. BRAMELEY; Phys. Rev., **39**, 378 (1932).
- 5) L. H. GRAY and G. T. P. TARRANT, Proc. Roy. Soc., A, **136**, 662 (1932).
- 6) L. H. THOMAS, Proc. Camb. Phil. Soc, **23**, 542 (1927).
- E. GERMI, ZS. f. Phys., **48**, 73 (1928).
- 7) V. BUSH and S. H. CALDWELL, Phys. Rev., **38**, II, 1898 (1931).
- M. S. VALLARTA and N. ROSEN, Phys. Rev., **41**, 708 (1932).

(November 1932.)

昭和七年十二月二十八日印刷

昭和七年十二月三十日發行

編纂發行者 臺北帝國大學理農學部

印刷者 劉 川 首

臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

購買申込所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

問 丸 善 株 式 會 社

東京市日本橋區第二丁目

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (II)

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, December 10, 1932)

(1) Wir nehmen auf einer Kugel \mathfrak{z} drei Punkte

$$\mathfrak{x}^a [a=I, II, III]$$

im R , und auf einer weiteren Kugel \mathfrak{z}^* ebenfalls drei Punkte \mathfrak{x}^{*a} an, so gibt es genau vier Möbiustransformationen des Raumes, die die Figur $\{\mathfrak{z}\mathfrak{x}^a\}$ in die Figur $\{\mathfrak{z}^*\mathfrak{x}^{*a}\}$ überführen.

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit \mathfrak{z} in \mathfrak{z}^* überführen, dann gehen dabei die \mathfrak{x}^a in drei Punkten $\bar{\mathfrak{x}}^a$ auf \mathfrak{z}^* über.

Dann kann man auf zwei verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft auf \mathfrak{z}^* die $\bar{\mathfrak{x}}^a$ in die \mathfrak{x}^{*a} überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem oben ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen. Denn die Figur $\{\mathfrak{z}^*\mathfrak{x}^{*a}\}$ kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Kugel \mathfrak{z}^* zwei Kreisverwandtschaften, einmal die Identität des Raumes, dann die Inversion an \mathfrak{z}^* , die alle Punkte von \mathfrak{z}^* in Ruhe lässt.

Dann gibt es die Inversion auf \mathfrak{z}^* , die den Kreis durch die Punkte \mathfrak{x}^{*a} auf \mathfrak{z} punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es zwei Transformationen im Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an \mathfrak{z}^* ausführt.

Da die Figur $\{\xi^{\alpha}\}$ von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von Möbius im Raum 10-gliedrig.

(2) Es seien zwei Kreise \mathfrak{R} , \mathfrak{R} im R_3 gegeben.

Ist

$$\eta = \hat{\rho}_\alpha \xi^\alpha$$

eine normierte Kugel im R_3 durch \mathfrak{R} , so setzen wir

$$(1) \quad \hat{\eta}\hat{\eta} = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1$$

ein.

Dann muss

$$(2) \quad \cos \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

sein, wobei φ den Winkel zwischen $\hat{\eta}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Nun setzen wir

$$(3) \quad \begin{cases} U \equiv T^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta, \\ V \equiv A^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta, \end{cases}$$

dann folgt:

$$(4) \quad U - \lambda V = (T^{11} - \lambda A^{11}) \rho_1^2 + 2(T^{12} - \lambda A^{12}) \rho_1 \rho_2 + (T^{22} - \lambda A^{22}) \rho_2^2,$$

d. h.

$$(5) \quad \cos^2 \varphi - \lambda = (T^{11} - \lambda A^{11}) \rho_1^2 + 2(T^{12} - \lambda A^{12}) \rho_1 \rho_2 + (\rho_2^2 - \lambda A^{22}) \rho_2^2.$$

Die Diskriminante von (4) ist

$$(6) \quad \begin{vmatrix} T^{11} - \lambda A^{11} & T^{12} - \lambda A^{12} \\ T^{12} - \lambda A^{12} & T^{22} - \lambda A^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

d. h.

$$(7) \quad [T^{11}T^{22} - (T^{12})^2] - \lambda[T^{11}A^{12} + T^{12}A^{11} - 2T^{12}A^{12}] \\ + \lambda^2[A^{11}A^{22} - (A^{12})^2].$$

Nun betrachten wir

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreischaren, (XIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 36 (1932) p. 110.

$$(3') \quad \bar{U} \equiv \bar{A}^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta, \\ \bar{V} \equiv \bar{A}^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta,$$

dann folgt daraus

$$(7') \quad [\bar{T}^{11}\bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2] - \lambda[\bar{T}^{11}\bar{A}^{12} + \bar{T}^{12}\bar{A}^{11} - 2\bar{T}^{12}\bar{A}^{12}] \\ + \lambda^2[\bar{A}^{11}\bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2].$$

Bildet man aus den Wurzelpaaren λ_1, λ_2 und $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ die Gleichungen

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} [T^{11}T^{22} - (T^{12})^2] - \lambda[T^{11}A^{12} + T^{12}A^{11} - 2T^{12}A^{12}] \\ \quad + \lambda^2[A^{11}A^{22} - (A^{12})^2] = 0, \\ [\bar{T}^{11}\bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2] - [\bar{T}^{11}\bar{A}^{12} + \bar{T}^{12}\bar{A}^{11} - 2\bar{T}^{12}\bar{A}^{12}] \\ \quad + \lambda^2[\bar{A}^{11}\bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2] = 0, \end{array} \right.$$

dann ist die Bedingung dafür, dass die harmonische Trennung der beiden Elementenpaare vorhanden ist,

$$(9) \quad [T^{11}T^{22} - (T^{12})^2][\bar{A}^{11}\bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2] + [A^{11}A^{22} - (A^{12})^2] \times \\ \times [\bar{T}^{11}\bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2] - 2[T^{11}A^{12} + T^{12}A^{11} - 2T^{12}A^{12}] \times \\ \times [\bar{T}^{11}\bar{A}^{12} + \bar{T}^{12}\bar{A}^{11} - 2\bar{T}^{12}\bar{A}^{12}] = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung mag daher als die harmonische Simultaninvariante θ bezeichnet werden, und es folgt daher der

Satz 1: Die Bedingung für die harmonische Trennung der beiden Wertepaare von $\cos \varphi$ und $\cos \bar{\varphi}$ ist mit (9) gegeben.

Wie oben kann man auch folgende Sätze erhalten:

Satz 2: Die Bedingung

$$\theta^2 - 4J_1J_2 = 0$$

ist, dass die Gleichungen (9) eine gemeinsame Wurzel haben, wobei

$$J_1 = [T^{11}T^{22} - (T^{12})^2][A^{11}A^{22} - (A^{12})^2] \\ - [T^{11}T^{12} + T^{12}A^{11} - 2T^{12}A^{12}]^2$$

und

$$J_2 = [\bar{T}^{11}\bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2][\bar{A}^{11}\bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2] \\ - [\bar{T}^{11}\bar{T}^{12} + \bar{T}^{12}\bar{A}^{11} - 2\bar{T}^{12}\bar{A}^{12}]^2$$

sind.

Satz 3: Das Doppelverhältnis zweier Wertepaare von $\cos \varphi$ und $\cos \bar{\varphi}$ ist

$$\frac{\theta - 2\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 A_2}}}{\theta + 2\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 A_2}}} \quad \text{bez.} \quad \frac{\theta + 2\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 A_2}}}{\theta - 2\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 A_2}}}.$$

drückt also die Funktion der Invarianten aus.

(3) Nun betrachten wir

$$(1) \quad \hat{y}\hat{y} = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

$$(2) \quad \cos' \varphi = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta T^{\alpha\beta}$$

wieder,⁽¹⁾ so kommt man zu einem System von linearen und homogenen Gleichungen:

$$(3) \quad (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0.$$

Folgende Gleichung⁽²⁾ stellt den Extremwert von $\cos' \varphi$ dar:

$$(4) \quad (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\beta = 0.$$

Damit eine triviale Nulllösung für die verschiedenen Lösungen dieser Gleichung existiert, muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden; es folgt daher:

$$(5) \quad |T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}| = 0.$$

Aus (4) folgt⁽³⁾

$$(6) \quad \theta' - A_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \theta + T/A = 0,$$

d. h.

$$(7) \quad \theta^2 - 2H \cdot \theta + K = 0.$$

wobei $\theta = \cos \varphi$ ist.

Es gilt somit

- (1) MATSUMURA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (XIV), Tôhoku Math. Journ., Vol. 36 (1932) p. 123.
 (2) Vergl. LEVI-CIVITA: Der absolute Differentialkalkül, Berlin (1928) S. 114.
 (3) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (I), Tôhoku Math. Journ., Vol. 31 (1929), p. 30.

$$(8) \quad \begin{cases} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2H, \\ \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = K, \end{cases}$$

wobei φ_1 und φ_2 den Maximum- und Minimumwert von φ bedeuten.

Nun wollen wir φ_1 und φ_2 als den Hauptwinkel zwischen Kreis und Kugel bezeichnen, dann gelten für die Hauptwinkel die Bedingungen

$$(9) \quad \begin{cases} (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi_1 \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\beta^{(1)} = 0, \\ (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi_2 \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\beta^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Aus (9) erhalten wir :

$$(10) \quad (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1) A^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{(1)} \rho_\beta^{(2)} = 0.$$

Ist

$$(11) \quad \cos^2 \varphi_2 \neq \cos^2 \varphi_1,$$

dann folgt

$$(12) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{(1)} \rho_\beta^{(2)} = 0.$$

(12) ist die Bedingung für das Senkrechtschneiden zweier Kugeln

$$\bar{\eta} = \rho_\alpha^{(1)} \bar{x}^\alpha, \quad \bar{\eta} = \rho_\beta^{(2)} \bar{x}^\beta,$$

wobei $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}$ beide Kugeln sind.⁽⁴⁾

Also folgt :

$$(13) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{(1)} \rho_\beta^{(2)} = \cos \theta_1 \cdot A^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{(1)} \rho_\beta^{(2)} = 0.$$

Betrachten wir (9), so folgt

$$(14) \quad \begin{cases} T^{1\beta} \rho_\beta^{(1)} = \cos \theta_1 A^{1\alpha} \rho_\alpha^{(1)}, \\ T^{1\beta} \rho_\beta^{(1)} = \cos \theta_1 A^{1\alpha} \rho_\alpha^{(1)}. \end{cases}$$

Aus (14) folgt

$$(15) \quad A^{1\alpha} \rho_\alpha^{(1)} T^{1\beta} \rho_\beta^{(1)} = A^{1\alpha} \rho_\alpha^{(1)} T^{1\beta} \rho_\beta^{(1)};$$

d. h. $\rho_\alpha^{(1)}$ erfüllt die Gleichung

$$(16) \quad \varepsilon_{\tau\delta} A^{\alpha\delta} T^{\tau\beta} \rho_\beta^{(1)} = 0.$$

(4) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (II), Tôhoku Math. Journ., Vol. 31 p. 44.

Auf ähnliche Weise kann man verstehen, dass auch $\rho_a^{(2)}$ (16) erfüllen muss.

Setzen wir nun

$$(17) \quad h^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\tau\delta} A^{\alpha\tau} T^{\delta\beta},$$

dann erhalten wir aus (16)

$$(18) \quad h^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta = 0,$$

welches die Gleichung für die Hauptwinkel ist.

$\cos^2 \varphi$ ist eine Lösung der sog. charakteristischen Gleichung.

(4) Die Bedingung dafür, dass die beiden Richtungen

$$(dt_1, dr_1) \quad \text{und} \quad (dt_2, dr_2)$$

aufeinander senkrecht stehen, ist also

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt_1 dt_2 + (\theta_t \theta_\tau) (dt_1 dr_2 + dt_2 dr_1) + (\theta_\tau \theta_\tau) dr_1 dr_2 = 0.$$

Betrachten wir

$$(2) \quad A dt^2 + 2B dt dr + C dr^2 = 0,$$

wobei A, B, C zunächst drei Konstanten sein sollen, so sind entsprechend den beiden Wurzeln für $\frac{dt}{dr}$ von (2), die wir als reell und von einander verschieden voraussetzen, zwei Fortschreitungsrichtungen im Punkt P definiert.

Wenn diese aufeinander senkrecht stehen, dann muss

$$(3) \quad (\theta_t \theta_t) \frac{dt_1}{dr_1} \frac{dt_2}{dr_2} + (\theta_t \theta_\tau) \left(\frac{dt_1}{dr_1} + \frac{dt_2}{dr_2} \right) + (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

sein.

Nun ist, wenn

$$A \neq 0$$

ist,

$$\frac{dt_1}{dr_1} \frac{dt_2}{dr_2} = \frac{C}{A}, \quad \frac{dt_1}{dr_1} + \frac{dt_2}{dr_2} = -\frac{2B}{A},$$

und darum nach der vorhergehenden Gleichung

$$(4) \quad (\theta_i \theta_i) C - 2 (\theta_i \theta_\tau) B + (\theta_\tau \theta_\tau) A = 0,$$

eine Gleichung, die, wie man leicht zeigen kann, auch für

$$A = 0$$

gilt.

Die linke Seite von (4)

$$(\theta_i \theta_i) C - 2 (\theta_i \theta_\tau) B + (\theta_\tau \theta_\tau) A$$

nennt man die Simultaninvariante der quadratischen Differentialformen

$$(5) \quad \begin{cases} (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0, \\ A dt^2 + 2B dt d\tau + C d\tau^2 = 0. \end{cases}$$

Man bekommt so den Satz.

Satz 1: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden durch (2) definierten Fortschreitungsrichtungen orthogonal sind, ist, dass die Simultaninvariante (4) der beiden quadratischen Formen (5) verschwindet.

Durch die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{d\tau} = \phi(t, \tau)$$

ist ein Kurvensystem auf der Fläche bestimmt.

Wie erhält man nun die Orthogonaltrajektorien?

Wenn man

$$\frac{dt_1}{d\tau_1}$$

durch

$$\phi(t, \tau)$$

und

$$\frac{dt_2}{d\tau_2}$$

durch

$$\frac{dt}{d\tau}$$

in (3) ersetzt, so erhält man für die orthogonalen Kurven die Differentialgleichung

$$(\theta_i\theta_i)\phi\frac{dt}{d\tau}+(\theta_i\theta_\tau)\left(\phi+\frac{dt}{d\tau}\right)+(\theta_\tau\theta_\tau)=0.$$

Ist φ der Winkel, den die Fortschreitungsrichtung

$$\frac{dt}{d\tau}$$

mit der Richtung

$$\tau = \text{const. } (dt=0)$$

bildet, so erhält man

$$\tan^2\varphi = -\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{(\theta_i\theta_i)} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Satz 2: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Parameterkurven Minimallinien sind, ist, dass die Gleichungen

$$(\theta_i\theta_i)=0, \quad (\theta_i\theta_\tau)=0$$

für alle Wertepaare t, τ identisch erfüllt sind.

Zunächst haben wir den

Satz 3: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterkurven isometrische Linien sind, ist, dass für alle Wertepaare

$$t, \tau$$

die Gleichungen

$$\frac{(\theta_i\theta_i)}{(\theta_\tau\theta_\tau)} = \frac{\phi(t)}{\phi(\tau)},$$

$$(\theta_i\theta_\tau)=0$$

bestehen.

Sind ausserdem t und τ thermische Parameter, so ist

$$(\theta, \theta_t) = (\theta_\tau, \theta_\tau).$$

Bezeichnet man ω als den Winkel, den der kleinste Abstand

$$dp$$

des

$$(t, \tau)$$

vom

$$(t + dt, \tau + d\tau)$$

mit dem kürzesten Abstand im ersten Grenzpunkt ($d\tau=0$) bildet, so hat man

$$\cos^2 \omega = \frac{(\theta, \theta_t) dt^2}{(\theta_t, \theta_t) dt^2 + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2},$$

$$\sin^2 \omega = \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2}{(\theta_t, \theta_t) dt^2 + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2}.$$

(5) **Satz 1:** Steht ein Kreis auf zwei Kreisen S' und S'' senkrecht, so steht er auch auf allen Kreisen des Büschels

$$S' - \rho S''$$

senkrecht, wobei ρ der Parameter ist.

Diesen Satz findet man im KLEIN'schen Buch.⁽¹⁾

Hier mögen wir ihn aber nach anderer einfacher Methode beweisen.

Ist ξ senkrecht zu S' und S'' dann folgt

$$\xi S' = 0,$$

$$\xi S'' = 0;$$

also folgt

$$\xi (S' - \rho S'') = 0, \quad \text{w. z. b. w..}$$

Satz 2: Stehen zwei Kreise ξ, η im R_2 aufeinander senkrecht und berühren sich dann müssen ξ und η zwei Punkte sein.

Beweis: Aus unseren Voraussetzungen folgen :

$$(1) \quad (\xi\eta)=0,$$

$$(2) \quad (\xi\xi)(\eta\eta) - (\xi\eta)^2 = 0,$$

also muss

$$(\xi\xi) = 0$$

und

$$(\eta\eta) = 0$$

sein, w. z. b. w..

Es seien zwei Kreise ξ und η im R_2 gegeben.

Jeder Kreis des Büschels hat die Gestalt

$$(1) \quad \xi + \lambda \eta.$$

Wenn (1) Punkte bezeichnen, dann folgt :

$$(2) \quad (\xi + \lambda \eta, \xi + \lambda \eta) = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad (\xi\xi) + 2 (\xi\eta) \lambda + (\eta\eta) \lambda^2 = 0.$$

Wenn für jeden Wert von λ (2) besteht, dann müssen

$$(3) \quad \begin{cases} (\xi\xi)=0, \\ (\xi\eta)=0, \\ (\eta\eta)=0 \end{cases}$$

sein.

Also müssen ξ und η zwei Punkte sein.

Man kann mit

$$\xi = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$$

zwei Punkte im R_3 bezeichnen, wobei a_i drei Kugeln im R_3 darstellen.

Wenn

$$(4) \quad \begin{cases} (a_1 a_1)=0, \\ (a_2 a_2)=0, \\ (a_3 a_3)=0 \end{cases}$$

sind, so folgen

$$\begin{aligned}
 0 &= a_1 (a_1 a_1) + a_2 (a_1 a_2) + a_3 (a_1 a_3), \\
 (5) \quad 0 &= a_1 (a_2 a_1) + a_2 (a_2 a_2) + a_3 (a_2 a_3), \\
 0 &= a_1 (a_3 a_1) + a_2 (a_3 a_2) + a_3 (a_3 a_3).
 \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen nebeneinander bestehen müssen, so ist in der Tat

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) \\ \dots\dots\dots \\ (a_1 v_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

(6) ist unsere Bedingung.

(6) Man kann⁽¹⁾ auch die Theorie der Kreise und Kugeln auf die Theorie des Korrelationskoeffizienten anwenden.

(7) Sind zwei Kugeln \mathfrak{x} und \mathfrak{y} auf eine Hilfskugel \mathfrak{z} , die \mathfrak{x} und \mathfrak{y} gleichsinnig berührt, gerichtet, so besteht der Kosinuswinkel

$$\cos \varphi = x = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\mathfrak{z})(\mathfrak{z}\mathfrak{x}).$$

Es gilt folgender Satz über die Vorzeicheninvariante

$$\varepsilon = \text{sgn} (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{III}) (\mathfrak{x}^{III} \mathfrak{x}^I)$$

dreier Kugeln \mathfrak{x}^a .

Es ist z. B. $\varepsilon = -1$, wenn die drei Kugeln sich durch stetige Abänderungen im MÖBIUS'schen Raume auf Punkte zusammenziehen lassen, ohne dass sie dabei in orthogonale Lagen kommen.

Zu vier gegebenen linear unabhängigen Kugeln \mathfrak{x}^a [$a=I, \dots, IV$] gibt es immer eine gemeinsame senkrechte Kugel \mathfrak{y} , die wir definieren können durch

$$(\mathfrak{y}^*) = | \mathfrak{x}^I, \mathfrak{x}^{II}, \mathfrak{x}^{III}, \mathfrak{x}^{IV}, * |$$

wo für $*$ eine willkürliche Kugel eingesetzt werden kann.

Wir schreiben symbolisch:

$$\mathfrak{y} = || \mathfrak{x}^I, \mathfrak{x}^{II}, \mathfrak{x}^{III}, \mathfrak{x}^{IV} ||$$

und nennen \mathfrak{y} das vektorielle Produkt.

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: On the Theory of Correlation, Journal of the Society of Tropical Agriculture vol. 4 (1932) p. 83, 213, Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan.

Führen wir ein allgemeines System von solchen fünf senkrechten Koordinatenkugeln ein, so können wir den pentasphärischen Koordinaten wieder eine allgemeinere geometrische Auffassung zu Grunde legen.

Bei drei zueinander paarweise senkrecht gerichteten eigentliche Kugeln x^a

$$\left[x^a x^b = \begin{cases} 1 & \text{für } a=b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases} \right]$$

Kann man den Ausdruck

$$\delta = \frac{|x^I x^{II} x^{III} u^*|}{(u^*)}$$

dem Vorzeichen nach unverändert lassen, wo für $*$ eine beliebige Kugel mit

$$(u^*) \neq 0$$

eingesetzt werden kann. Dabei ist u einer der beiden Schnittpunkte der drei Kugeln x^a :

$$[uu = ux^a = 0].$$

Das Vorzeichen von δ hängt wesentlich von der Richtung der Kugeln x^a und von der Reihenfolge, in der sie genommen werden, ab.

(8) Wir betrachten nun die beiden Ausdrücke

$$(1) \quad A^{ab} \rho_a \rho_b \quad \text{und} \quad T^{ab} \rho_a \rho_b$$

wieder, von denen der erstere wegen

$$A > 0$$

nicht besonders auffällt.

Bekanntlich gilt nun der Satz, dass man ein solches Formenpaar immer durch eine lineare Transformation in das Formenpaar

$$(2) \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 \quad \text{und} \quad T^1 \rho_1^2 + T^2 \rho_2^2$$

übertragen kann.

Und zwar geht dies im allgemeinen auf eine und nur eine Art, aber im Falle

$$(3) \quad T^{\alpha\beta} \text{ prop. } A^{\alpha\beta}$$

auf unendlich viele.

Schliessen wir den Fall (3) aus, so können wir auf eine und nur eine Art zwei Hilfskugeln durch \mathfrak{K} annehmen, so dass

$$(4) \quad A^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \text{ und } T^{12} = 0$$

sind. Ebenso können wir die Kugeln durch $\bar{\mathfrak{K}}$ auf nur eine Art so wählen, dass

$$(5) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \text{ und } \tilde{T}^{12} = 0$$

sind, wenn wir den Fall

$$(6) \quad \tilde{T}^{\lambda\mu} \text{ prop. } \tilde{A}^{\lambda\mu}$$

ausschliessen.

Mit den Gleichungen (3) oder (6) schliessen wir den Fall halbisonogaler Kreise aus.

Zu einem vorgegebenen Winkelwert φ in

$$\cos' \varphi = \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta}$$

gibt es nun im allgemeinen zwei Kugeln durch \mathfrak{K} , die $\bar{\mathfrak{K}}$ unter diesem Winkel schneiden.

Wenden wir auf

$$\cos' \varphi = \rho_{\alpha} \rho_{\beta} T^{\alpha\beta}$$

die spezielle Transformation (3), (4), (5) an, so ergibt sich für die zugehörigen

$$(7) \quad \rho_I = \pm \sqrt{\frac{\cos' \varphi - T^{12}}{T^{11} - T^{22}}}, \quad \rho_{II} = \pm \sqrt{\frac{T^{11} - \cos' \varphi}{T^{11} - T^{22}}}.$$

Da ein gemeinsamer Vorzeichenwechsel von ρ_I und ρ_{II} nur die Normierung der Kugel $\rho_{\alpha} x^{\alpha}$ ändert, können wir uns etwa bei ρ_I auf das Vorzeichen + beschränken und durch (7) sind dann im allgemeinen zwei Lösungen gegeben: Wir wollen sie dem Zeichen + und - bei ρ_{II} entsprechend σ_{α} und τ_{α} nennen.

Die winkelhalbierenden Kugeln von $\sigma_{\alpha} x^{\alpha}$ und $\tau_{\alpha} x^{\alpha}$ sind dann durch

$$(8) \quad \eta = \sigma_a \xi^a + \tau_a \xi^a \quad \text{und} \quad \zeta = \sigma_a \xi^a - \tau_a \xi^a$$

gegeben.

Sie fallen aber nach (7) mit ξ^I und ξ^{II} zusammen.

Da diese Kugeln von φ gar nicht abhängen, sind die Winkelhalbierenden für jedes Kugelpaar (8) immer dieselben.

(9) Die Möbiusgeometrie zweier sich nicht schneidender Kreise ist gleichbedeutend mit der nichteuklidischen Geometrie zweier Geraden. Denn zwei solche Kreise haben eine gemeinsame orthogonale Kugel.

Betrachten wir diese Kugel als die „absolute Kugel“, die wir im Möbius'schen Raum adjungieren, um zur nichteuklidischen Geometrie zu gelangen, so werden die zu ihr orthogonalen Kreise \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$ nichteuklidische Geraden.

Wir hatten also die geometrischen Untersuchungen dieses auch in die nicht euklidische Geometrie verlegen können.

(10) Es seien ξ^I , ξ^{II} zwei Kreise im R_1 .

Fassen wir ξ^I und ξ^{II} als Funktionen der Veranderlichen t auf, nämlich

$$f(\xi^I, \xi^{II}) = 0$$

dann folgt:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^I} \frac{d\xi^I}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}} \frac{d\xi^{II}}{dt} = 0.$$

Diese Beziehung gestattet es, an der betrachteten Stelle

$$(\xi^I, \xi^{II})$$

den Wert des Verhältnisses

$$\frac{d\xi^I}{dt} : \frac{d\xi^{II}}{dt}$$

zu berechnen, falls

$$-\frac{df}{\partial \xi^I} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}}$$

nicht zugleich verschwinden.

Aus (1) folgt, wenn ξ^I, ξ^{II} die Koordinaten eines gewöhnlichen Kreispunktes sind und p einen Proportionalitätsfaktor ist:

$$\frac{d\xi^I}{dt} = p \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}}, \quad \frac{d\xi^{II}}{dt} = -p \frac{\partial f}{\partial \xi^I}.$$

Durch

$$\dot{\xi}^I = \frac{d\xi^I}{dt}$$

ist der Berührungspunkt von ξ mit

$$\xi + \dot{\xi} dt$$

dargestellt.

Die Kreise

$$\int p \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}} dt$$

sind dann die Schmiegekreise der Kurve

$$p \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}} = \dot{\xi}^I.$$

Gleichfalls sind dann

$$-\int p \frac{\partial f}{\partial \xi^I} dt$$

die Schmiegekreise der Kurve

$$-p \frac{\partial f}{\partial \xi^I} = \dot{\xi}^{II}.$$

Wenn man ξ^I und ξ^{II} als Funktionen der Veränderlichen und des Parameters τ betrachtet, so ist

$$\xi^I = f_1(t, \tau), \quad \xi^{II} = f_2(t, \tau).$$

Hier darf die Determinante

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}$$

nicht identisch verschwinden, da sonst zwischen ξ^I und ξ^{II} eine Gleichung

bestände, und wir es mit einem Kurvenpaar, nicht mit einer Kurvenschar, zu tun hätten.

Die Funktionen f_1 und f_2 sollen innerhalb eines Wertbereichs der Veränderlichen t und τ als analytische Funktionen vorausgesetzt werden.

Sind nun t und τ zwei Werte innerhalb dieses Wertbereichs, so sollen die Ausdrücke

$$f_1(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau) \text{ und } f_2(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau),$$

falls man Δt und $\Delta \tau$ absolut genommen hinreichend klein wahlt, nach ganzen positiven Potenzen von Δt und $\Delta \tau$ entwickelbar sein.

Ein Kurvenpaar ist durch die Gleichungen :

$$\xi^I = f_1(t), \quad \xi^{II} = f_2(t)$$

gegeben.

Die Orte der Mittelpunkte aller Sehnen der Kurven, die durch den Punkte (t_0) gehen, werden durch die Gleichungen bestimmt :

$$\xi^I = \frac{1}{2} \{ f_1(t_0) + f_1(\tau) \}, \quad \xi^{II} = \frac{1}{2} \{ f_2(t_0) + f_2(\tau) \}.$$

Die sämtlichen Sehnenmittelpunktskurven werden daher durch die die Beziehungen

$$\xi^I = \frac{1}{2} \{ f_1(t) + f_1(\tau) \}, \quad \xi^{II} = \frac{1}{2} \{ f_2(t) + f_2(\tau) \}$$

dargestellt.

Sind zweifach unendlich viele Kurven in einer Ebene gegeben, so kann man fragen, ob es ein Kurvenpaar gibt, das jede Einzelkurve der Schar berührt.

Die Kurvenschar ist durch eine Gleichung von der Form

$$f(\xi^I, \xi^{II}, \tau) = 0$$

gegeben.

Als notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Berührungskurve ergibt sich somit die, dass aus den Gleichungen

$$f(\xi^I, \xi^{II}, \tau) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$$

ξ^I und ξ^{II} als reelle Funktionen von τ berechnet werden können.

(11) Seien \mathfrak{K}^I , \mathfrak{K}^{II} und \mathfrak{K}^{III} drei Kugeln im R_3 dann kann man mit

$$\mathfrak{K}^{\alpha}[\alpha=I, II, III]$$

zwei Punkte d. h. eine Gerade im R_3 bestimmen.

Betrachten wir eine Geraden-Kugel-Transformation und wollen diese Transformation der Einfachheit halber mit S bezeichnen.

Betrachtet man alle Berührungstransformationen in R -Räume, durch welche alle orientierten Kugeln in orientierte Kugeln transformiert werden, und bezeichnet man eine solche Transformationen mit Σ , dann kann die zusammengesetzte Transformation

$$S \Sigma S^{-1}$$

entweder als eine Kollineation oder als eine Korrelation betrachtet werden.⁽¹⁾

(12) Setzen wir

$$\bar{\lambda}(t, \tau)(\theta_i \theta_i), \bar{\lambda}(t, \tau)(\theta_i \theta_i), \bar{\lambda}(\theta_i \theta_i)$$

anstatt

$$E, F, G,$$

dann kann man den allgemeinen Begriff der Riemannschen Fläche in dem Fall der Kreisflächen untersuchen.⁽²⁾

(13) Betrachten wir

$$(1) \quad A^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} = 1,$$

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}$$

wieder, dann kann man (1) und (2) in der Form

$$(3) \quad [\rho_1, \rho_2] \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = 1,$$

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = [\rho_1, \rho_2] \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

schreiben.

(1) KUBOTA, T. Einige Bemerkungen zur LIE'schen Kugelgeometrie, Science Report of the Tohoku Imp. Univ., vol. IX, S. 2.

(2) HURWITZ-COURANT: Funktionen-Theorie, zweite Auflage, Berlin, S. 486.

Nun betrachten wir (3). Dann kann man nach HERMITE verstehen dass

$$(A+S)^{-1} (A-S)$$

eine Matrix ist.

$$\Xi' A \Xi$$

ist durch eine lineare Transformation invariant, wobei

$$\Xi \equiv [\rho_1, \rho_2]$$

eine Matrix und S eine beliebige schiefsymmetrische Matrix ist.

Für (4) erhalten wir auch ähnliche Resultate.

(14) Betrachten wir

$$f \equiv (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2,$$

$$f' \equiv A du + 2B du dv + C dv^2,$$

dann stellt

$$f=0$$

die Minimallinien auf der Kreisfläche und

$$f'=0$$

ein anderes Kurvennetz dar.

Wenn

$$t=t(u, v),$$

$$\tau=\tau(u, v)$$

bestehen, dann folgt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = (\theta_i \theta_i) \left(-\frac{\partial t}{\partial u} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial u} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2, \\ B = (\theta_i \theta_i) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} + (\theta_i \theta_\tau) \left(\frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) + (\theta_\tau \theta_\tau) \times \\ \quad \times \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}, \\ C = (\theta_i \theta_i) \left(\frac{\partial t}{\partial v} \right)^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial v} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2. \end{array} \right.$$

Sollen die aus ihnen folgenden Werte von $(\theta_u \theta_u)', (\theta_u \theta_v)', (\theta_v \theta_v)'$ die Bedingungen

$$(\theta_u \theta_u)' = A, (\theta_u \theta_v)' = B, (\theta_v \theta_v)' = C$$

haben, dann folgt aus (I):

$$(2) \quad \begin{cases} (\theta_u \theta_u)' = (\theta_t \theta_t) \left(\frac{dt}{du} \right)^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial u} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2, \\ (\theta_u \theta_v)' = (\theta_t \theta_t) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} + (\theta_t \theta_\tau) \left(\frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) + \\ \quad + (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}, \\ (\theta_v \theta_v)' = (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial t}{\partial v} \right)^2 + 3(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} + (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2. \end{cases}$$

Es ist also zu untersuchen, ob es zwei Funktionen $t(u, v)$ und $\tau(u, v)$ gibt, die diesen drei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades genügen, in denen die gegebenen Funktionen von u und v . $(\theta_t \theta_t), (\theta_t \theta_\tau), (\theta_\tau \theta_\tau)$ bekannte Funktionen von t und τ bedeuten.

(15) Es sei

$$(1) \quad ds^2 = \lambda(t, \tau) [(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2]$$

das Quadrat des Linienelementes der Fläche.

Wir setzen

$$(2) \quad \begin{aligned} a &= \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}, \quad b = \frac{(\theta_t \theta_\tau)}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}, \\ d &= \frac{(\theta_t \theta_t)}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}, \quad ab - d^2 = 1. \end{aligned}$$

und setzen die Funktionen $(\theta_t \theta_t), (\theta_t \theta_\tau), (\theta_\tau \theta_\tau), a, b, d$ stetig voraus.

In der LICHTENSTEIN'schen Arbeit wird durch

$$(3) \quad \frac{1}{2} \log \{ b(\bar{t} \bar{\tau})(t - \bar{t})^2 - 2d(\bar{t}, \bar{\tau})(t - \bar{t})(\tau - \bar{\tau}) + a(\bar{t}, \bar{\tau})(\tau - \bar{\tau})^2 \}$$

eine in einem vorgeschriebenen Punkt in der $t\tau$ -Ebene unstetige, den partiellen Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial t} - b \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ -\frac{\partial v}{\partial \tau} = a \frac{\partial u}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{cases}$$

genügende Funktion $u(t, \tau)$ bestimmt.

Durch Vermittlung der Funktion $u(t, \tau) + iv(t, \tau)$ wird ein zusammenhängender Teil des Kreisflächenstückes C auf einem Teil einer $t\tau$ -Ebene konform abgebildet; $u(t, \tau)$ genügt einer gewissen linearen Integralgleichung, die durch sukzessive Approximationen gelöst werden kann.

(16) Ist

$$F(t, \tau) = 0$$

eine Kurve auf einer Kreisfläche, so soll jeder Punkt der Kurve senkrecht zu dem Bogenelemente der Kurve um die Konstante unendlich kleine Strecke $\delta \bar{t}$ verschoben werden.

Für die Zuwächse δt und $\delta \tau$ von t und τ erhält man daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda(t, \tau) \{ (\theta_t \theta_t) \delta t + 2(\theta_t \theta_\tau) \delta t \delta \tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \delta \tau^2 \} &= \delta \bar{t}; \\ \lambda(t, \tau) \{ (\theta_t \theta_t) dt \delta t + (\theta_t \theta_\tau) (dt \delta \tau + d\tau \delta t) + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau \delta \tau \} &= 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$(\theta_t \theta_t) dt \delta t + (\theta_t \theta_\tau) (dt \delta \tau + d\tau \delta t) + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau \delta \tau = 0,$$

oder wenn man setzt:

$$dF = p dt + q d\tau = 0,$$

die Werte:

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) p - (\theta_t \theta_\tau) q}{\sqrt{\lambda} \sqrt{[(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2][(\theta_t \theta_t) q^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2]}} \delta \bar{t}, \\ \delta \tau &= \frac{(\theta_t \theta_t) q - (\theta_t \theta_\tau) p}{\sqrt{\lambda} \sqrt{[(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2][(\theta_t \theta_t) q^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2]}} \delta \bar{t}. \end{aligned}$$

- (1) LICHTENSTEIN, L.: Beweis des Satzes, dass jedes hinreichend kleine, im Wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Abhand. der Kgl. Preuss. Akademie von Jahre 1911.
- (2) LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie der konformen Abbildung, Extrait du Bulletin de L'Academie des Sciences de Cracovie (1916).

Bei Anwendung der Beziehung :

$$H = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i) q^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) t q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}}$$

ist daher :

$$\delta t = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \delta \bar{t}, \quad \delta \tau = \frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \delta \bar{t},$$

wo

$$\bar{H} = \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i) q^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}}$$

ist.

Die Zuwächse von p und q sind jetzt so zu bestimmen, dass

$$\delta(p dt + q d\tau) = 0$$

wird. Dann gehen je zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Linienelemente t, τ, p, q und $t+dt, \dots, q+dq$ der Kurve in zwei ebensolche Linienelemente über und die ganze Kurve als Linienelementgebilde betrachtet wieder in eine Kurve.

Hieraus ergibt sich :

$$\delta p dt + \delta q d\tau + \left(p d \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} + q d \frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \right) \delta \bar{t} = 0.$$

Unsere infinitesimale Paralleltransformation erscheint daher als eine homogene Berührungstransformation im Sinne LIES.

(17) Benutzt man die einander entsprechenden Kurvensysteme auf S_1 und S_2 als Koordinatenkreise

$$t = \text{const.}$$

und

$$\tau = \text{const.},$$

so mögen die Linienelemente ds_1 und ds_2 von S_1 und S_2 gegeben werden durch

$$(1) \quad ds_1^2 = \lambda_1 \{ (\theta_i \theta_i)_1 dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_1 dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau)_1 d\tau^2 \},$$

$$(2) \quad ds_2^2 = \lambda_2 \{ (\theta_i \theta_i)_2 dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau)_2 dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau)_2 d\tau^2 \}.$$

Dann stellt die Gleichung

$$(3) \quad 0 = a_{11} dt^2 + 2a_{12} dt d\tau + a_{22} d\tau^2$$

eine Doppelschaar von Kurven dar, deren zwei Tangenten im Punkte zu den Tangentenpaaren der Kurven

$$ds_1^2 = 0$$

und

$$ds_2^2 = 0$$

in demselben Punkte harmonisch sind, wenn die Koeffizienten a_{11} , a_{12} und a_{22} den Bedingungen genügen:

$$(4) \quad 0 = (\theta_\tau \theta_\tau)_1 a_{11} - 2(\theta_t \theta_\tau)_1 a_{12} + (\theta_t \theta_t)_1 a_{22}$$

$$(5) \quad 0 = (\theta_\tau \theta_\tau)_2 a_{11} - 2(\theta_t \theta_\tau)_2 a_{12} + (\theta_t \theta_t)_2 a_{22}.$$

Durch Elimination von a_{11} , a_{12} und a_{22} erhält man daher für die TISSOT'schen Orthogonalsysteme die Differentialgleichung:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} dt^2 & -dt d\tau & d\tau^2 \\ (\theta_\tau \theta_\tau)_1 & (\theta_t \theta_\tau)_1 & (\theta_t \theta_t)_1 \\ (\theta_\tau \theta_\tau)_2 & (\theta_t \theta_\tau)_2 & (\theta_t \theta_t)_2 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung stellt, solange ihre Discriminante

$$(7) \quad \Delta = [(\theta_t \theta_t)_1 (\theta_\tau \theta_\tau)_2 - (\theta_t \theta_t)_2 (\theta_\tau \theta_\tau)_1]^2 - 4[(\theta_t \theta_\tau)_1 (\theta_t \theta_\tau)_2 - (\theta_t \theta_\tau)_2 (\theta_t \theta_\tau)_1][(\theta_\tau \theta_\tau)_1 (\theta_t \theta_\tau)_2 - (\theta_\tau \theta_\tau)_2 (\theta_t \theta_\tau)_1]$$

nicht identisch verschwindet, eine Doppelschar von Kurven dar.

Da nun die Resultante der beiden Gleichungen $ds_1^2 = 0$ und $ds_2^2 = 0$ gerade derselbe Ausdruck Δ ist, so bedeutet $\Delta = 0$, dass die beiden Ausdrücke ds_1^2 und ds_2^2 einen gemeinschaftlichen Factor haben, und die Rechnung zeigt, dass er genau gleich der Quadratwurzel aus der rechten Seite der Gleichung (6) wird, wenn Δ verschwindet, in ein vollständiges Quadrat übergeht.

Man gelangt so zu dem LIE'schen Ausnahmefall, nämlich, dass (6) identisch besteht.

(18) Betrachten wir zwei Kreisflächen S und S' , und denken wir auf S wiederum

$$(1) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 1,$$

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

dann folgt:

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2}.$$

Auch betrachten wir auf S'

$$(4) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \frac{\bar{T}^{11} \rho_1^2 + 2\bar{T}^{12} \rho_1 \rho_2 + \bar{T}^{22} \rho_2^2}{\bar{A}^{11} \rho_1^2 + 2\bar{A}^{12} \rho_1 \rho_2 + \bar{A}^{22} \rho_2^2},$$

wobei

$$(5) \quad \bar{A}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 1$$

besteht.

Die Richtungen für welche

$$(6) \quad \cos^2 \varphi = \cos^2 \bar{\varphi}$$

ist, sind mit

$$(7) \quad (\bar{T}^{11} \pm T^{11}) \rho_1^2 + 2(\bar{T}^{12} \pm T^{12}) \rho_1 \rho_2 + (\bar{T}^{22} \pm T^{22}) \rho_2^2 = 0$$

gegeben.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Paare von obigen Richtungen harmonisch seien, ist

$$(8) \quad (\bar{T}^{11} + T^{11})(\bar{T}^{22} - T^{22}) + (\bar{T}^{22} + T^{22})(\bar{T}^{11} - T^{11}) \\ = 2(\bar{T}^{12} + T^{12})(\bar{T}^{12} - T^{12}),$$

d. h.

$$\bar{T}^{11} \bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2 = T^{11} T^{22} - (T^{12})^2$$

oder

$$\frac{\bar{T}^{11} \bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2}{\bar{A}^{11} \bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2} = \frac{T^{11} T^{22} - (T^{12})^2}{A^{11} A^{22} - (A^{12})^2}.$$

Die Doppellinien von Involution durch obige zwei Paare von Richtungen sind mit

$$\begin{vmatrix} dt^2 & -dtd\tau & d\tau^2 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

(19) Die Torsionslinien sind⁽¹⁾

$$(\theta, \theta_t)(\theta, \theta_\tau)dt^2 - 2(\theta, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau)dtd\tau + (\theta, \theta_\tau)(\theta_\tau, \theta_\tau)d\tau^2 = 0.$$

und die Minimallinien sind

$$(\theta, \theta_t)dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau)dtd\tau + (\theta_\tau, \theta_\tau)d\tau^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass das Doppelverhältniss zwischen zwei Richtungen von (2) mit den Richtungen von (2) gleich r ist, ist

$$9(1-r)^2(\theta, \theta_t)(\theta, \theta_\tau)^2(\theta_\tau, \theta_\tau) = (1+r)^2[(\theta, \theta_\tau)^2 - 4(\theta, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau)] \times \\ \times [(\theta, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta, \theta_\tau)^2]$$

(17) Betrachten wir nun :

$$(1) \quad \rho_a \rho_b A^{ab} = 1,$$

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \rho_b T^{ab},$$

so ergibt sich

$$(3) \quad \cos^2 \varphi < 1$$

für alle ρ_a , woraus man

$$(4) \quad |A^{ab} - T^{ab}| > 0$$

erhält.

(20) Ist der Kreis \mathfrak{z} im \mathbb{R}_2 imaginär, etwa

$$(1) \quad \mathfrak{z} = u + iv \quad (u, v : \text{reell}),$$

dann ziehen wir den konjugiert imaginären Kreis

$$(2) \quad \bar{\mathfrak{z}} = u - iv$$

in Betracht.

(1) OGURA, K.: On the Theory of Representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. vol. 12 (1917) p. 253.

Es muss dann gelten :

$$(3) \quad \bar{x}x = uu - vv + 2uvi = 1,$$

so dass

$$(4) \quad uu - vv = 1, \quad uv = 0$$

wird.

Wäre insbesondere

$$uu = 1, \quad vv = 0,$$

dann würden \bar{x} oder \bar{y} in dem Punkte v auf dem Kreis u berührende Kreise bezeichnen.

Drei sich in v berührende Kreise

$$u, \quad \gamma = u + iv, \quad \bar{\gamma} = u - iv$$

bilden ein Büschel.

Nehmen wir etwa an, um eine festen Fall vor Augen zu haben, dass u ganz in dem Gebiet zwischen γ und $\bar{\gamma}$ liege.

Dann werden alle Kreise σ , die $\bar{\gamma}$ berühren, aber nicht durch gehen, für die also gilt :

$$(\sigma\gamma)^2 = (\sigma\bar{\gamma})^2 = 1; \quad (\sigma v) \neq 0$$

d. h.

$$(u\sigma)^2 - (v\sigma)^2 = 1, \quad (u\sigma)(v\sigma) = 0,$$

d. h.

$$(v\sigma) = \pm i, \quad (u\sigma) = 0,$$

von u unter demselben Winkel ϕ geschnitten. Es folgt⁽¹⁾ daher :

$$\cos^2 \phi = (\sigma u)^2 = 0,$$

oder

$$\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Für den Winkel φ zwischen \bar{x} und \bar{y} gilt :

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1925) S. 126.

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi &= \frac{(\bar{x}x)^2}{(\bar{x}x)(\bar{x}x)} \\ &= \frac{(u^2 + v^2)^2}{(u' - v' + 2uvi) \cdot (u^2 - v^2 - 2uvi)}\end{aligned}$$

Ist ξ ein Kreis und x ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$\eta = 2(u + vi, \xi) \xi - (u + vi),$$

der zu x in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Wenn η gleich \bar{x} ist, dann ergibt sich:

$$u - iv = 2(u + vi, \xi) \xi - (u + vi)$$

d. h.

$$u = (u + vi, \xi) \xi,$$

d. h.

$$(\xi u) = (u\xi) + i(v).$$

Daraus folgt also:

$$(\xi v) = 0.$$

Zwei Kreise x und \bar{x} bestimmen ein Kreisbüschel, dessen ∞^1 Kreise ζ gegeben sind durch

$$\zeta = \alpha(u + iv) + \beta(u - iv),$$

d. h.

$$\zeta = (\alpha + \beta)u + (\alpha - \beta)iv.$$

Setzen wir

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = B,$$

so folgt

$$\zeta = A + Bvi$$

wobei A, B zwei Parameter sind.

Nehmen wir einen Kreis

$$x(t) = u(t) + v(t)i$$

als Funktion eines Parameters t an, so ist dadurch in der Ebene ein Kreisbüschel bestimmt.

Es gilt dann nach $(\dot{x}\dot{x})=1$:

$$(\dot{u}\dot{u})-(\dot{v}\dot{v})=1$$

und

$$\dot{u}\dot{v}=0$$

als identisch in t , wenn wir die Ableitung mit t durch Punkte bezeichnen.

Durch

$$d\sigma^2=(\dot{\dot{x}}\dot{\dot{x}})dt^2$$

und

$$\sigma=\pm\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\dot{\dot{u}}\dot{\dot{u}})-(\dot{\dot{v}}\dot{\dot{v}})+2\dot{\dot{u}}\dot{\dot{v}}i} dt$$

ist dann ein invarianter Parameter der Kreisschar bis auf Vorzeichen und additive Konstante bestimmt.

Man setzt für den unendlich kleinen Winkel $d\psi$ zwischen \dot{x} und dem Nachbarkreis $\dot{x}+\dot{\dot{x}}dt$:

$$\tan^2 d\psi=d\psi^2=d\sigma^2.$$

Der Scharen mit

$$(\dot{\dot{u}}\dot{\dot{u}})-(\dot{\dot{v}}\dot{\dot{v}})+2\dot{\dot{u}}\dot{\dot{v}}i=0,$$

d. h.

$$(\dot{\dot{u}}\dot{\dot{u}})=(\dot{\dot{v}}\dot{\dot{v}}), \quad \dot{\dot{u}}\dot{\dot{v}}=0,$$

bedeuten, dass sich konsekutive Kreise berühren.

Die Kreise $u(t)+v(t)i$ sind dann die Schmiegkreise der Kurve

$$\dot{u}(t)+\dot{v}(t)i.$$

Sind $\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}$ die beiden Schnittpunkte von \dot{x} mit dem Nachbarkreise, die beiden Envelopenpunkte, so gilt:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{b})=(\mathfrak{b}\dot{x})=(\mathfrak{b}\dot{x}')=0,$$

$$(\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{b}})=(\bar{\mathfrak{b}}\dot{x})=(\bar{\mathfrak{b}}\dot{x}')=0,$$

d. h. .

$$\begin{aligned} (vv)=0, (vu)=0, (v\bar{v})=0, (vu')=0, (v\bar{v}')=0, \\ (\bar{v}\bar{v})=0, (\bar{v}u)=0, (\bar{v}\bar{v})=0, (\bar{v}u')=0, (\bar{v}\bar{v}')=0. \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) gilt :

$$D(u, \bar{x}, v, \bar{x}) = -\frac{i}{-i} = -1,$$

wobei D das Doppelverhältniss von u, \bar{x}, v, \bar{x} ist.

$$(5) \quad (\bar{x}\bar{x})=0$$

ist die Bedingung dafür, dass \bar{x}, \bar{x} senkrecht sind.

Aus (5) folgt :

$$(u+iv, u-iv)=0$$

d. h.

$$(uu)+(vv)=0.$$

Wenn ein Punkt p auf \bar{x} liegt, dann folgt :

$$(pu)+i(pv)=0,$$

d. h.

$$(6) \quad (pu)=0 \text{ und } (pv)=0.$$

Aus (6) kann man sehen, dass p auch auf \bar{x} liegt.

(21) Die Gleichung für Minimallinien lautet :

$$(1) \quad ds^2 = -\frac{1}{\lambda(t, \tau)} [(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2] = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass die Parameterkurven

$$t=\text{const. und } \tau=\text{const.},$$

selber Minimallinien sind, ist nach (1)

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) = (\theta_\tau \theta_\tau) = 0.$$

Die Gleichung (1) ist vom zweiten Grad in $dt: d\tau$. Durch jeden Punkt der Kreisfläche gehen daher zwei Minimallinien.

Diese Linien sind zwar für reelle Flächen bei reellen Werten für

$$(\theta_t \theta_t), (\theta_t \theta_\tau), (\theta_\tau \theta_\tau)$$

imaginär, da die Diskriminante von (1)

$$\delta^2 = (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2$$

positiv ist.

Sie führen aber zu wichtigen, reellen Liniensystemen.

Hierzu denke man sich die Gleichung (1) in ihre beiden konjugiert imaginären Faktoren zerlegt;

$$(3) \quad P = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\theta_t \theta_t)}} [(\theta_t \theta_t) dt + (\theta_t \theta_\tau) d\tau + i \delta d\tau]$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\theta_t \theta_t)}} [(\theta_t \theta_t) d\tau + (\theta_t \theta_\tau) dt - i \delta d\tau]$$

Es gibt bekanntlich unendlich viele integrierende Faktoren, die einen solchen Differentialausdruck in ein vollständiges Differential verwandeln.

Ein solcher Faktor sei für P gleich $\mu + iv$ und das zugehörige Differential $da + id\beta$, wobei μ, v und a, β gewisse reelle Funktionen von (t, τ) sind. Dann ist

$$P(\mu + iv) = da + id\beta \quad \text{und} \quad Q(\mu - iv) = da - id\beta,$$

also

$$(4) \quad ds^2 = P \cdot Q = \bar{\lambda}' (da^2 + d\beta^2), \quad \bar{\lambda}' = \frac{1}{\mu^2 + v^2}.$$

Die Herstellung dieser Form (4) für das Linienelement erfordert also die Integration der Differentialgleichung (1).

Die Kurven

$$\alpha(t, \tau) = \text{const.} \quad \text{und} \quad \beta(t, \tau) = \text{const.},$$

oder kurz α und β besitzen eine charakteristische geometrische Eigenschaft.

Führt man nämlich α, β an Stelle von (t, τ) als Parameter ein, so nimmt ds^2 die Form (4) an, die im Vergleich mit (1) dadurch ausgezeichnet ist, dass der Koeffizient von $da d\beta$ gleich 0 ist und dass die Koeffizienten von da^2 und $d\beta^2$ einander gleich sind.

Das erste besagt dass die Kurvensysteme α, β sich orthogonal durchschneiden, das zweite, dass sich die Kreisfläche durch die Kurvensysteme α, β in unendlich kleine Quadrate teilen lässt.

Betrachtet man α, β gleichzeitig als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, so folgt aus (4), dass die Kreisfläche durch die Gleichungen

$$\alpha(t, \tau) = \alpha, \quad \beta(t, \tau) = \beta$$

konform auf der Ebene abgebildet wird mit der linearen Vergrößerung $\bar{\lambda}$, wobei dem System der zu den Axen in der Ebene parallelen Linien das Kurvensystem α, β auf der Kreisfläche entspricht.

Da sich nun die Ebene durch die Linien α, β in unendlich kleine Quadrate teilen lässt, so gilt dasselbe von der Kreisfläche.

Wegen dieser Eigenschaft heisst das System α, β ein isometrisches (isothermes) Kurvensystem der Kreisfläche und die Grössen α, β thermische Parameter.

Daraus ergibt sich der **Satz**:

Jede Lösung der Differentialgleichung (1) liefert ein isometrisches Kurvensystem auf der Kreisfläche, dessen Parameter α, β dem Linien-element die Formel (4) erteilen, also die Kreisfläche konform auf die Ebene abbilden.

Entsprechend den unendlich vielen integrierenden Faktoren von (3) gibt es auf jeder Fläche unendlich viele isometrische Liniensysteme. Um den Übergang von einem solchen System zu einem anderen zu bilden, sei wieder $\mu + iv$ ein integrierender Faktor von P und $da + id\beta$ das zugehörige Differential.

Dann ist bekanntlich der allgemeinste integrierende Faktor von P in der Form

$$(\mu + iv)F(\alpha + i\beta)$$

enthalten, wobei F eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} P(\mu + iv)F(\alpha + i\beta) &= F(\alpha + i\beta)(da + id\beta) \\ &= d\Pi(\alpha + i\beta) = dA + idB, \end{aligned}$$

$$(5) \quad ds^2 = L^2(dA^2 + dB^2)$$

an, d. h. die zwei Kurvensysteme A, B bilden ebenfalls ein isometrisches System auf der Kreisfläche.

Da // ebenso willkürlich ist wie F, so hat man folgenden Satz: Ist (α, β) ein isometrisches System, so erhält man aus ihm unendlich viele andere isometrische Systeme (A, B), indem man—unter // eine willkürliche Funktion verstanden—

$$A + iB = //(\alpha + i\beta)$$

setzt und in dieser Gleichung die reellen und imaginären Bestandteile trennt.

(22) Die quadratische Differentialform

$$I = \frac{(\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2}{\sqrt{(\theta, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta, \theta_\tau)^2}}$$

ist invariant bei jeder beliebigen Inversion⁽¹⁾

(23) Es mögen zwei Kreisflächen vorliegen; die eine habe die Gleichung:

$$\xi = \xi(t, \tau)$$

und die andere die Gleichung:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(t, \tau).$$

Indem wir bei beiden Kreisflächen die Parameter gleich bezeichnet haben, nämlich mit t und τ , ist schon jedem Punkte (t, τ) der einen Kreisfläche ein Punkt der anderen gesetzmässig zugeordnet.

Fragen wir uns, unter welchen Bedingungen diese Abbildung konform ist, so sind

$$(\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

$$(\bar{\theta}, \bar{\theta}_t) dt^2 + 2(\bar{\theta}, \bar{\theta}_\tau) dt d\tau + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) d\tau^2 = 0,$$

die Minimallinien beider Kreisflächen.

Dies tritt dann und nur dann ein, wenn

(1) ROTHE, R.: Inversion und konforme Abbildung von Flächen, Math. Ann. Bd. 72 (1912) S. 57.

$$(\theta_i \theta_t) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_t) = (\overline{\theta_i \theta_t}) : (\overline{\theta_i \theta_\tau}) : (\overline{\theta_\tau \theta_t})$$

ist.

Also gilt der

Satz: Um zwei Kreisflächen konform aufeinander abzubilden, hat man solche Parameter auf beiden Kreisflächen einzuführen, in denen das Verhältnis:

$$(\theta_i \theta_t) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_t) = (\overline{\theta_i \theta_t}) : (\overline{\theta_i \theta_\tau}) : (\overline{\theta_\tau \theta_t})$$

ist.⁽¹⁾

Als dann entsprechen diejenigen Punkte beider Kreisflächen einander, die zu denselben Parameterwerten gehören.

(24) Man erkennt aus meiner Arbeit,⁽²⁾ leicht die geometrische Bedeutung von c der THOMSEN'schen Arbeit, denn

$$-\frac{c'}{c} = \frac{d\rho}{ds}$$

besteht.⁽⁴⁾

(25) Betrachten wir in dem Falle

$$\cos^2 \varphi = k', \quad (k = \text{const.})$$

dann folgt

$$(T^{11} - k^2 A^{11})\rho_1^2 + 2(T^{12} - k^2 A^{12})\rho_1\rho_2 + (T^{22} - k^2 A^{22})\rho_2^2 = 0.$$

Wir ordnen nun der binären quadratischen Form

$$(1) \quad (T^{11} - k^2 A^{11})\rho_1^2 + 2(T^{12} - k^2 A^{12})\rho_1\rho_2 + (T^{22} - k^2 A^{22})\rho_2^2$$

denjenigen Punkt zu, dessen homogene Koordinaten

$$(T^{11} - k^2 A^{11}) : (T^{12} - k^2 A^{12}) : (T^{22} - k^2 A^{22})$$

sind.

(1) NEUMANN, C.: Zur Theorie der konformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche, Math. Ann. Bd. XIII (1877-78) S. 573.

(2) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (1), Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ. vol. V (1932) p. 58.

(3) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Bd. IV (1925) S. 127.

(4) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, S. 103.

Es entspricht dann jeder Form ein bestimmter Punkt im R_2 .
Umgekehrt entsprechen irgend einem Punkte

$$T^{11} - k^2 A^{11} : T^{12} - k^2 A^{12} : T^{22} - k^2 A^{22}$$

die unendlich vielen Formen

$$\bar{\rho}(T^{11} - k^2 A^{11})\rho_1 + 2\bar{\rho}(T^{12} - k^2 A^{12})\rho_1\rho_2 + \bar{\rho}(T^{22} - k^2 A^{22})\rho_2^2$$

wobei $\bar{\rho}$ jeden beliebigen reellen Wert erhalten kann.

Wenn die Determinante D der Form

$$(T^{11} - k^2 A^{11} : T^{12} - k^2 A^{12} : T^{22} - k^2 A^{22}) : \\ D = (T^{12} - k^2 A^{12})^2 - (T^{11} - k^2 A^{11})(T^{22} - k^2 A^{22})$$

verschwindet, so können wir λ so bestimmen, dass

$$T^{11} - k^2 A^{11} : T^{12} - k^2 A^{12} : T^{22} - k^2 A^{22} = 1 : -\lambda : \lambda^2$$

d. h.

$$a : b : c = 1 : -\lambda : \lambda^2, \text{ wo } a \equiv T^{11} - k^2 A^{11}, b \equiv T^{12} - k^2 A^{12}, \\ c \equiv T^{22} - k^2 A^{22}$$

Also ergibt sich :

$$(3) \quad \bar{\rho}t^2 - 2\bar{\rho}\lambda\tau + \bar{\rho}\lambda^2\tau^2 = \bar{\rho}(t - \lambda\tau)^2.$$

Betrachten wir eine beliebige Büscheltransformation

$$(2) \quad t = \alpha' + \beta\tau', \tau = \gamma t' + \delta\tau',$$

dann geht die Form (1) in die Form

$$\alpha' \rho'^2 + 2b' \rho' \tau' + c' \tau'^2$$

über, wo

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha' = (T^{11} - k^2 A^{11})\alpha^2 + 2(T^{12} - k^2 A^{12})\alpha\gamma + (T^{22} - k^2 A^{22})\gamma^2 \\ b' = (T^{11} - k^2 A^{11})\alpha\beta + (T^{12} - k^2 A^{12})(\alpha\delta + \beta\gamma) + (T^{22} - k^2 A^{22})\gamma\delta \\ c' = (T^{11} - k^2 A^{11})\beta^2 + 2(T^{12} - k^2 A^{12})\beta\delta + (T^{22} - k^2 A^{22})\delta^2 \end{cases}$$

ist.

Es wird demnach durch die Transformation (2) jedem Punkte (a, b, c) ein bestimmter Punkt (a', b', c') zugeordnet, und ein Blick auf die Gleichung (2) lehrt, dass die durch diese Zuordnung vermittelte Umformung der Ebene eine Kollineation ist.

Durch die Transformation (2) wird (3) in die Form

$$\bar{\rho} [a't' + \beta\tau' - (\gamma t' + \delta\tau')]^2 = \bar{\rho}(a - \gamma\lambda) \left(t' - \frac{\delta\lambda - \beta}{-\gamma\lambda + \alpha} \tau' \right)^2$$

übergeführt.

Dem λ entspricht also vermöge der Kollineation (2), wo

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{\delta\lambda - \beta}{-\gamma\lambda + \alpha}, \\ \lambda = -\frac{a\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta} \end{cases}$$

ist.⁽¹⁾

Eine einfache Rechnung ans (4) ergibt hier

$$a'c' - b'^2 = (a\delta - \beta\gamma)'(ac - b^2);$$

wenn

$$a\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

ist, dann sind beiden Diskriminanten gleich.

(26) Hier wenden wir uns zu den charakteristischen Eigenschaften der Kugel.

Den Kennzeichnungen der Kugel, die ich vor mehreren Jahren und vor kurzem gefunden habe, will ich hier einige weitere folgen lassen.

Es seien

$$R_1, R_2$$

die Hauptkrümmungsradien,

$$s = R_1 + R_2, \quad p = R_1 R_2$$

und

(1) Vergl. FROBENIUS, G. Über die Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen, Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften VIII (1913) S. 203.

H

die Stützfunktion der jeweils betrachteten Eifläche.

Mit grossen Buchstaben bezeichne ich im folgenden diejenigen Gleichungen, aus denen ich schliessen werde, dass die ihnen genügenden Eiflächen Kugeln sind.

$$(A) \quad p = aH^2 + bH + c, \quad a > 0, b > 0.$$

Dann gilt für die Oberfläche O , das Integral der mittleren Krümmung M und des Volumen v bei Integration von (A) über das sphärische Bild

$$O = \int p dw = a \int H^2 dw + bM + 4\pi c,$$

$$3v = \int H p dw = a \int H^3 dw + b \int H^2 dw + cM,$$

nach der Ungleichung von H. A. SCHWARZ also wegen $a > 0$:

$$3v \geq \frac{aM}{4\pi} \int H^2 dw + b \int H^2 dw + cM.$$

$$OM = aM \int H^2 dw + bM^2 + 4\pi cM,$$

nach H. MINKOWSKI:

$$\geq 12\pi v \geq aM \int H^2 dw + 4\pi b \int H^2 dw + 4\pi cM,$$

also wegen

$$a > 0, \quad b > 0$$

und der SCHWARZ'schen Ungleichung

$$M^2 \geq 4\pi \int H^2 dw \geq M^2.$$

Es muss also

$$OM = 12\pi v$$

sein, was nach MINKOWSKI nur im Fall der Kugel richtig ist, w. z. b. w..

$$(B) \quad p = aH + b, \quad a > 0.$$

Daraus folgt

$$O = aM + 4\pi b$$

$$3v = a \int H^2 dw + bM \geq \frac{aM^2}{4\pi} + bM,$$

also wieder nach MINKOWSKI

$$\begin{aligned} OM &= aM^2 + 4\pi bM \\ &\geq 12\pi v \geq aM^2 + 4\pi bM, \end{aligned}$$

woraus sich wie in (A) die Kugel ergibt.

$$(C) \quad p = asH.$$

Hier ist

$$O = a \int sH dw,$$

andererseits ist nach STEINER und MINKOWSKI

$$O = \frac{1}{2} \int sH dw,$$

also folgt :

$$a = \frac{1}{2}.$$

Nun ist

$$sH = 2p = 2R_1 R_2 \leq \frac{(R_1 + R_2)^2}{2} = \frac{s^2}{2},$$

d. h.

$$H \leq \frac{s}{2},$$

wobei nur im Falle

$$R_1 \equiv R_2,$$

d. h. im Falle der Kugel, überall auf der Fläche das Gleichheitszeichen stehen kann.

Andererseits ist aber nach MINKOWSKI

$$M = \frac{1}{2} \int s dw = \int H dw \leq \frac{1}{2} \int s dw = M;$$

es gilt also tatsächlich stets

$$H = \frac{s}{2},$$

d. h. wir haben wieder eine Kugel, w. z. b. w..

$$(D) \quad p = as + bH, \quad b > 0.$$

Jetzt wird

$$O = 2aM + bM = M(2a + b).$$

$$3v = \int p H dw = 2aO + b \int H^2 dw$$

$$= 2aM(2a + b) + b \int H^2 dw.$$

Nun ist nach MINKOWSKI

$$M' \geq 4\pi O = 4\pi M(2a + b),$$

also

$$(*) \quad M \geq 4\pi(2a + b).$$

Andererseits ist ebenfalls nach MINKOWSKI

$$O' = M'(2a + b) \geq 3vM$$

$$= 2aM(2a + b) + bM \int H^2 dw, \text{ da } b > 0 :$$

$$\geq 2a(2a + b)M' + bM \frac{M'}{4\pi}$$

also nach (*)

$$\geq (2a + b)' M'.$$

Es müssen also überall die Gleichheitszeichen gültig sein, z. B. auch in (*), d. h.

$$M' = 4\pi O$$

was nur für die Kugel richtig ist, w. z. b. w..

$$(E) \quad p = as + bH', \quad b > 0.$$

Es ist dann :

$$O = 2aM + b \int H^2 dw,$$

$$3v = 2aO + b \int H^2 dw$$

$$= 4a^2M + 2ab \int H^2 dw + b \int H^3 dw.$$

Nun wird

$$\begin{aligned} 0^2 &= 4a^2M^2 + 4abM \int H^2 dw + b^2 \left(\int H^2 dw \right)^2 \\ &\geq 3aM = 4a^2M^2 + 2abM \int H^2 dw + bM \int H^3 dw, \end{aligned}$$

also, da $b > 0$, ist,

$$(**) \quad 2aM \int H^2 dw + b \left(\int H^2 dw \right)^2 \geq M \int H^3 dw.$$

Nun ist aber nach der SCHWARZ'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} M \int H^3 dw &= \int H dw \cdot \int H^2 dw \geq \left[\int H^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} dw \right]^2 \\ &= \left(\int H^2 dw \right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\int H^2 dw \geq \frac{M^2}{4\pi} \geq 0 = 2aM + b \int H^2 dw,$$

es folgt also daraus (**):

$$2aM + b \int H^2 dw \geq \int H^2 dw \geq \frac{M^2}{4\pi} \geq 0 = 2aM + b \int H^2 dw.$$

Es gilt überall, z. B. auch in

$$M^2 \geq 4\pi \cdot 0$$

das Gleichheitszeichen,⁽¹⁾ so dass es sich MINNOWSKI wieder um eine Kugel handelt,⁽²⁾ w. z. b. w..

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über charakteristische Eigenschaften der Kugel, die jetzt unter der Presse in Tôhoku Math. Journal ist.

(2) Vergl. NAKAJIMA, S.: Über charakteristische Eigenschaften der Kugel; Tôhoku Math. Journ., vol. 26 (1926) p. 361.

Ueber Fläche und Kurven (II)

Soji MATSUMURA

(Accepted for publication, January 20th, 1933)

(1) Ueber die Deviation ebener Kurven

Bezeichnet man nun den Winkel zwischen der Tangente und der x Achse mit τ , so sind⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \tau, & \frac{dy}{ds} = \sin \tau, \\ \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho(s)}, & \tau = \int \frac{ds}{\rho(s)}, \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}. \end{cases}$$

Somit erhält man die Parameterdarstellung der Kurve :

$$(2) \quad \begin{cases} y = \int \left\{ \cos \int \frac{ds}{3 \int \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} ds, \\ x = \int \left\{ \sin \int \frac{ds}{3 \int \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} ds. \end{cases}$$

Benutzt man die GAUßsche Darstellung der komplexen Zahl durch den Punkt auf einer Ebene,

$$(3) \quad \sigma = \int e^{i\tau} \frac{ds}{3 \int \frac{ds}{\rho(s)}} ds.$$

Nun seien die beiden Ebenenkurven durch ihre natürlichen Gleichungen

(1) MATSUMURA, S.: Ueber Flächen und Kurven, (1); Memoirs of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V., No. 3, p. 58. [Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 7, April, 1933.]

$$(4) \quad \rho = \rho(s), \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$$

gegeben.

Dann erhält man als Gleichungen der Kurven

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma = x + iy = \int e^{i\int \frac{ds}{3 \int \operatorname{tg} \varphi ds}} ds, \\ \bar{\sigma} = \bar{x} + i\bar{y} = \int e^{i\int \frac{ds}{3 \int \operatorname{tg} \bar{\varphi} d\bar{s}}} d\bar{s}. \end{cases}$$

Nun betrachten wir eine Kreisverwandtschaft, welche durch Transformation der komplexen Zahlen

$$(6) \quad \bar{\sigma} = \frac{\alpha\sigma + \beta}{\gamma\sigma + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

dargestellt wird, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ komplexe Konstanten bedeuten.

Dann ist (6) nicht anderes als eine MöBRUSsche Involution zusammengesetzt mit einer Bewegung.

Bezeichnet man nämlich die Gleichung der Ebenenkurve mit

$$\varphi = \varphi(s),$$

wobei ρ den Krümmungsradius und s die Kurvenlänge bedeuten, dann bleibt

$$3\operatorname{tg} \varphi \cdot (d\lambda)^2$$

durch MöBRUSsche Involution ungeändert, während sich sein Vorzeichen durch Inversion ändert, wobei $ds = \rho d\lambda$ ist.

Gleiches gilt für

$$\begin{aligned} I = & \frac{\cos \varphi}{6 \sin \varphi} + \frac{3 \sin \varphi}{2 \cos \varphi} + \frac{\rho}{\sin 2\varphi} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{2\rho^2}{3 \sin 2\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \\ & - \frac{\rho^2}{6 \sin^2 \varphi} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{6\rho^2}{24 \cos \varphi \sin^3 \varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2, \end{aligned}$$

denn

$$\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \text{ ist.}$$

Auch gelten die folgenden Sätze.

Damit die beiden Ebenenkurven, welche durch

$$\varphi = \varphi(s), \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$$

gegeben sind, durch eine MÖBIUSSCHE Involution und eine Bewegung zueinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$\tan \varphi \cdot (d\lambda)^2 = \tan \bar{\varphi} (d\bar{\lambda})^2$$

definiert ist, die Invariante I den gleichen Wert hat.

Damit sie durch eine Inversion und eine Bewegung zueinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in welchen die Zuordnung durch

$$\tan \varphi (d\lambda)^2 = \tan \bar{\varphi} (d\bar{\lambda})^2$$

definiert ist, die Invariante I den entgegengesetzt gleichen Wert hat.

Satz: Bezeichnet man

$$\tan \varphi (d\lambda)' = \tan \bar{\varphi} (d\bar{\lambda})^2$$

definiert ist, die Invariante I den entgegengesetzt gleichen Wert hat.

Bezeichnet man

$$\int \sqrt{\pm 3 \tan \varphi} d\lambda$$

als Inversionsparameter p , so kann die Relation

$$\pm I = \psi(p),$$

als natürliche Gleichung der Ebenenkurve in der Inversionsgeometrie betrachtet werden.

Wenn die beiden Ebenenkurven mit den natürlichen Gleichungen

$$\varphi = \varphi(s), \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(s)$$

durch eigentliche LAGUERRESCHE Transformation ineinander überführbar sind, dann gilt

$$\rho \tan \varphi \cdot (d\lambda)^2 = \bar{\rho} \tan \bar{\varphi} \cdot (d\bar{\lambda})^2,$$

wenn sie durch uneigentliche LAGUERRESche Transformation ineinander überführbar sind, dann gilt

$$\rho \tan \varphi \cdot (d\lambda)^2 = -\bar{\rho} \tan \bar{\varphi} \cdot (d\bar{\lambda})^2.$$

Das Gleiche gilt auch für die Invariante :

$$I = \frac{5}{36} \frac{\rho \cos \varphi}{\sin^4 \varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{3}{4} \frac{\tan \varphi}{\rho} + \frac{1}{3\rho \tan \varphi} - \\ - \frac{4\rho}{9 \sin 2\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{\rho}{9 \sin^2 \varphi} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} - \frac{3}{\sin 2\varphi} \frac{d\varphi}{ds},$$

wobei die Differentiation in Bezug auf s zu nehmen ist.

Damit die beiden Ebenenkurven durch eine eigentliche LAGUERRESche Transformation zueinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$\rho \tan \varphi \cdot (d\lambda)^2 = \bar{\rho} \tan \bar{\varphi} \cdot (d\bar{\lambda})^2$$

definiert ist, auch die Beziehung

$$I = \bar{I}$$

gilt.

Damit die beiden Ebenenkurven durch eine uneigentliche LAGUERRESche Transformation zueinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$\rho \tan \varphi \cdot (d\lambda)^2 = -\bar{\rho} \tan \bar{\varphi} \cdot (d\bar{\lambda})^2$$

definiert ist, auch die Beziehung

$$I = -\bar{I}$$

gilt.⁽¹⁾

(1) Vergl. KUBOTA, T.: Beiträge zur Inversionsgeometrie und LAGUERREgeometrie, Japanese Journal of Mathematics, Vol. I (1924) p. 41.

W. Blaschke hat in seinem Buch (Vorlesungen über Differentialgeometrie 111, S. 100)

$$b' = b(g + \bar{g})$$

gewonnen.

Hier können wir diesem b geometrische Bedeutung geben. In dem Falle, daß die Brennpunkte durch Reflexion in einer Ebene, und der leuchtende Punkt im Unendlichen liegen, dann wird⁽¹⁾

$$r = \frac{3}{4} \rho \left(-\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \cos \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi} \right),$$

wo $\bar{\varphi}$ den Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Normale n einer ebenen Kurve bedeutet.

Also folgt

$$r = \frac{3}{4} \rho (-\tan \varphi \cdot \cos \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi}),$$

oder aus $\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$ folgt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3 \tan \varphi} \frac{d\rho}{dt},$$

d. h. (7₁)
$$v = \frac{1}{3 \tan \varphi} \frac{d\rho}{dt},$$

wo v die Geschwindigkeit des Körpers in der Bewegung längs ebener Kurven und t der Zeit bedeuten.

Aus (7₁) folgt

$$N = \frac{\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2}{9 \rho \tan^2 \varphi},$$

wobei N die Komponentenzerlegung der Beschleunigung längs Normale ist.⁽²⁾

- (1) STÜBLER, E.: Ueber Brennpunkte durch Reflexion, Zeitschrift für Math. und Naturwissenschaftlichen Unterricht, 39. Jahrgang, 2 und 3 Heft (1906) S. 120.
- (2) ROUTH, E. J.: A treatise on Dynamics of a particle, Cambridge (1888), p. 12.

Das vom Mittelpunkt des dem s gehörenden Kreises auf die Potenzlinie gefällte Lot besitze die Maßzahl $\pm h$, dann folgt⁽¹⁾

$$h^2 - \rho^2 = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \Delta s^2 + \dots}{36 \operatorname{tg}^2 \varphi + \dots},$$

wo s die Bogenlänge der ebenen Kurve und ρ der Krümmungshalbmesser sind.

Nun ²⁾

$$\tau - \rho = \frac{1}{6 \rho^2} \frac{d\rho}{ds} \Delta s + \dots,$$

also :

$$\tau - \rho = \frac{1}{3 \rho^2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta s + \dots$$

Die Koordinaten x, y der gegebenen Kurve (K) seien also Funktionen der Bogenlänge s der Kurve betrachtet und durch die Gleichungen

$$x = f_1(s), \quad y = f_2(s)$$

festgelegt, wobei x, y die rechtwinklige Koordinaten des Kurvenzugs sind.

Wir betrachten einen gewöhnlichen P auf (K), wo $s=s$ ist.

Durch den dem $s=s+\Delta s$ gehörenden Punkt P' (x', y') werde eine Gerade parallel zur Kurventangente in P gezogen.

Diese Gerade wird, da P kein Wendepunkt ist, die Kurve in einem dem Punkt P benachbarten Punkt P'' (x'', y'') schneiden, welcher dem Werte $s+\Delta's$ gehören möge.

Da die Strecke PP'' der Tangente in P parallel liegt, haben wir :

$$\{f_1(s+\Delta s) - f_1(s+\Delta's)\} f_2'(s) - \{f_2(s+\Delta s) - f_2(s+\Delta's)\} f_1'(s) = 0$$

oder :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{f_1''(s) f_2'(s) - f_2''(s) f_1'(s)\} (\Delta s^2 - \Delta's^2) \\ & + \frac{1}{6} \{f_1'''(s) f_2'(s) - f_2'''(s) f_1'(s)\} (\Delta s^3 - \Delta's^3) + \dots = 0 \end{aligned}$$

und nach Division mit $\Delta s - \Delta's$:

(1) LILIENTHAL: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. Leipzig (1906) S. 57.

(2) l. c. (1) S. 1.

$$-\frac{1}{2\rho}(\Delta s + \Delta' s) + \frac{1}{6\rho^2} \frac{d\rho}{ds}(\Delta s^2 + \Delta s \cdot \Delta' s + \Delta' s^2) + \dots = 0,$$

wobei ρ der Krümmungshalbmesser ist.

Hieraus ergibt sich

$$\Delta' s + \Delta s = \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{ds} \Delta s^2 + \dots,$$

d.h.⁽¹⁾

$$\Delta' s + \Delta s = \frac{1}{\rho} \tan \varphi (\Delta s)^2 + \dots,$$

so ergibt sich

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta s} \left(\frac{\Delta' s}{\Delta s} + 1 \right) = \tan \varphi.$$

Wir betrachten den Fall der Bewegung eines Punktes in der Ebene.

Durch einen festen Punkt o legen wir als x - und y - Achsen parallel zu der Tangente und zu inneren Normalen der Bahnkurve des Punktes.

Diese Achsen rotieren um o mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}$, wenn λ der Winkel der Tangente an die Bahnkurve mit einer beliebigen festen Richtung in der Ebene ist.

Bezeichnet

$$v = 3 \tan \varphi \frac{ds}{d\rho}$$

die Geschwindigkeit des Punktes, s das zur Zeit t durchlaufene Bogenstück, ρ den Krümmungsradius der Bahnkurve, so haben wir

$$v = \frac{ds}{dt} = 3 \tan \varphi \frac{ds}{d\rho}, \quad \rho = \frac{ds}{d\lambda};$$

die Winkelgeschwindigkeit der Achsen lässt sich demnach in der Form

$$3 \tan \varphi \frac{ds}{d\rho} / \rho$$

schreiben.

(1) 1. c. (1).

Da die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der Bewegungsachse v , o sind, so folgt daraus, dass die Komponenten der Beschleunigung in Richtung der gleichen Achse v und

$$9 \operatorname{tg}^2 \varphi \left(\frac{ds}{d\rho} \right)^2 / \rho$$

sind.

Wegen

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds} \\ &= 3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\varphi} \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

so ergibt sich, dass die Beschleunigung des bewegten Punktes in Richtung der Tangente der Bahnkurve die Größe

$$v \frac{dv}{ds} = 3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\rho} \right),$$

in Richtung der inneren Normalen die Größe

$$9 \operatorname{tg}^2 \varphi \left(\frac{ds}{d\rho} \right)^2 / \rho$$

hat.

Die Komponenten der Beschleunigung des Punktes in Richtung der Tangente, Haupt- und Binormalen

$$3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\rho} \right), \frac{\left(3 \operatorname{tg} \varphi \frac{ds}{d\rho} \right)^2}{\rho}, 0.$$

Es sei

$$f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer analytischen Kurve (M), die ein konvexes Oval bildet, und es sei ferner φ der Winkel der äußeren Normale gegen die X-Achse:

Es werde weiter mit

$$\rho = \int_0^s \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} ds$$

der positiv gerechnete Krümmungsradius von (M) im Punkte x, y bezeichnet; dann bestehen für die Punkte von (M) die Gleichungen

$$\frac{dx}{d\psi} = - \int_0^s \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} ds \cdot \sin \psi,$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \int_0^s \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} ds \cdot \cos \psi.$$

Spezialisieren wir die Lage des Koordinatensystems dahin, dass die X-Achse (M) im Punkte $x=0$ berührt und daher $\psi = -\frac{\pi}{2}$ ist, so hat der im Koordinatenursprunge (M) fünfpunktig berührende Kegelschnitt eine Gleichung in der Form

$$y = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).$$

Setzt man

$$\frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} \frac{ds}{d\psi} = \rho_1,$$

und

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} \right) \frac{ds}{d\psi} + \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{v} \frac{d^2 s}{d\psi^2} = \rho_2,$$

so lassen sich die Größen A, B und C durch die Werte ausdrücken, die

$$\rho, \rho_1 \text{ und } \rho_2$$

im Oskulationspunkte besitzen, und erhält man

$$A = -\frac{1}{\rho}; \quad B = -\frac{\rho_1}{3\rho^2};$$

$$C = \frac{9\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2}{9\rho^3}.$$

Es gibt eine einzige Parabel, die durch das Verschwinden der Determinante

$$AC - B^2$$

bestimmt ist, während

$$AC - B^2 > 0$$

den Ellipsen,

$$AC - B^2 < 0$$

den Hyperbeln der Schar zukommt.⁽¹⁾

Rollt eine Kurve auf einer Geraden ab, so gestalten sich die Formeln nach einer Bemerkung von R. DE SAUSSURE besonders bequem, wenn man für die rollende Polkurve die natürliche Koordinaten, d.h. Bogenlänge s und Krümmungsradius ρ , für die Rollkurven dagegen rechtwinklige Koordinaten x, y benutzt, wobei die geradlinige Polbahn die x -Achse und zu Anfang der Bewegung (für $s=0$) der Drehpol der Anfangspunkt sei.

Ist nämlich das Bogenstück s der Polkurve:

$$\rho = \varphi(s)$$

auf der x -Achse abgerollt, und wird das Abrollen um das Element weiter fortgesetzt, sodass sich die Polkurve weiterhin um den Kontingenzwinkel $ds : \rho$ dreht, so ändern sich die Koordinaten x, y eines mit der Polkurve fest verbundenen Punktes um Elemente dx, dy , für die sich aus einer Figur sofort ergibt

$$\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\tan \varphi} = x + y \frac{dy}{dx}, \quad 3 \int \frac{\tan \varphi}{y} dx = y \frac{ds}{dx};$$

dabei entsteht eine Rollkurve $y=f(x)$.

Es rolle eine Polkurve auf der Geraden (x -Achse) ab. Dabei beschreibe ein mit ihr fest verbundener Punkt eine Gerade

$$y = ax + a.$$

Die natürliche Gleichung der Polkurve geht dann in der Form

$$3 \int_0^s \tan \varphi ds - as - a = 0$$

hervor.

(1) BÖHMER: Ueber elliptisch-konvexe Ovale, Math. Annalen Bd., 60 (1905), S. 256.

Ist

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{\beta} = 1$$

die Gleichung der Rollkurve, so folgt für die Rollkurve die natürliche Gleichung

$$\frac{s^2}{a} + \frac{9 \left(\int \operatorname{tg} \varphi ds \right)^2}{\beta} = 1$$

Die natürliche Gleichung der CESÀROschen Kurven von Index n hat nach E. CESÀRO die Form

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{(n+1) \left(\left(\frac{\rho}{c} \right)^{\frac{2}{n-1}} + \frac{R^2}{C^2} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{2 \left(\frac{n+1}{n-1} \right)} - 1}}},$$

daraus folgt

$$\tan \varphi = -\frac{3(n-1)}{n+1} \sqrt{(n+1) \left(\left(\frac{\rho}{c} \right)^{\frac{2}{n-1}} + \frac{R^2}{C^2} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{2 \left(\frac{n+1}{n-1} \right)} - 1}.$$

Die Evolute der Evolute einer ebenen Kurve nennt man die zweite Evolute dieser Kurve.

Die Evolute der zweiten Evolute ist die dritte Evolute u.s.w. (vergl. CESAROSCHE Buch).⁽¹⁾

Es seien s_n , ρ_n und φ_n der Bogen, der Krümmungsradius und die Deviation der n -ten Evolute der ebenen Kurve in einem gegebenen Punkt, dann erhält man

$$\frac{d\rho_n}{\tan \varphi_n \cdot \rho_n} = \frac{d\rho_{n-1}}{\tan \varphi_{n-1} \cdot \rho_{n-1}} = \dots = \frac{d\rho}{\tan \varphi \cdot \rho}.$$

Ein Punkt (x, y) im R_2 beschreibt einen Teil der Eilinie und wir setzen

$$(7) \quad \begin{cases} x = x(\varphi), \\ y = y(\varphi), \end{cases}$$

wobei x , y stetige, differenziable und monotone Funktionen bedeuten.

(1) POWALEWSKI, G.: CESÀRO, Vorlesungen über natürliche Geometrie, 1926 S. 35.

Aus (7) erhalten wir

$$(8) \quad ds = \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi,$$

wobei s die Bogenlänge bedeutet.

In den Gleichungen (7) bedeutet der Parameter φ dann und nur dann die vom Punkte ($\varphi=0$) aus gemessene Bogenlänge der Kurve, wenn für jeden Wert von φ die Gleichung besteht:

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = 1.$$

Als dann können wir φ mit τ bezeichnen und unter $x'(\varphi)$ und $y'(\varphi)$ Kosinus und Sinus eines längs der Kurve veränderlichen Winkels verstehen:

$$x'(\varphi) = x'(s) = \cos \tau, \quad y'(\varphi) = y'(s) = \sin \tau.$$

Der Winkel τ ist eine Funktion von s .

Nun können wir schreiben:

$$x = x(s) = \int_0^s \cos \tau(s) ds,$$

$$y = y(s) = \int_0^s \sin \tau(s) ds.$$

(2) Ueber zwei Flächen, die eine Beziehung zueinander haben

(1)

In dieser kleinen Note möchte ich zwei Flächen studieren, für welche das Strahlensystem, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten dieser zwei Flächen gebildet wird, ein Normalsystem ist.⁽¹⁾

Es seien die zwei Flächen $\bar{x}(u, v)$ und $x(u, v)$.

Nach unseren Voraussetzungen über $x(u, v)$ und $\bar{x}(u, v)$ sind sie zwei Mäntel der Zentralflächen einer Fläche, und aus einem wohl-bekannten Satz in der gewöhnlichen Differentialgeometrie ergibt sich, dass diejenigen Flächenkurven, längs deren die beiden Flächen von den

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. J. Vol. 30, 33, 36.

gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden, geodätische Kurven auf der einen bzw. anderen Fläche sind.

Daraus folgen die Beziehungen :⁽¹⁾

$$\lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0$$

wobei

$$\sigma = \frac{GE_v - FG_u}{F G_u^1 - FE_v},$$

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E}$$

sind.

Betrachten wir wie oben zwei Gleichungen :

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0, \\ \bar{\xi}_{uv} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} \bar{\xi}_u + \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\xi}_v = 0 \end{cases}$$

wobei

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_u = \bar{\xi}_v, \\ \xi_v = -\bar{\xi}_u \end{cases}$$

bestehen,⁽²⁾ dann folgt aus (I) :

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_{uu} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} \xi_v + \frac{1}{\bar{\lambda}} \xi_u = 0, \\ \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0, \end{cases}$$

d.h.

$$(4) \quad \xi_{uu} + \xi_{vv} + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} \right) \xi_v + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \xi_u = 0.$$

(4) ist hyperbolisch in einem Gebiete (u, v) -Ebene.

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. J. Vol. 30, 33, 36.

(2) HURWITZ-COURANT: Funktionentheorie, Berlin (1925), S. 273.

Die durch

$$(5) \quad -du \, dv + dv^2 = 0$$

definierten Charakteristiken bilden jetzt zwei reelle Scharen

$$(6) \quad \varphi(u, v) = \text{const}, \quad \psi(u, v) = \text{const}.$$

Mittels der Transformation

$$(7) \quad \xi = \varphi(u, v), \quad \eta = \psi(u, v)$$

wird (4) auf die „Normalform“ gebracht, welche, wenn wieder u, v statt ξ, η geschrieben werden, lautet

$$(8) \quad L(z) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial u}{\partial v} = 0.$$

Die Charakteristiken von (8) sind die Parallelen zu den Koordinatenachsen

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

Der zu $L(u)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$(9) \quad M(\theta) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(a\theta) - \frac{\partial}{\partial v}(b\theta).$$

Dann wird⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & \iint (\theta L(Z) - ZM(\theta)) du dv \\ &= - \int_{AB} (Q dv - P du) + \int_{CB} Q dv - \int_{AC} P du, \end{aligned}$$

wobei

$$(10) \quad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\theta \frac{\partial z}{\partial u} - Z \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) + bz\theta, \\ Q &= \frac{1}{2} \left(\theta \frac{\partial z}{\partial v} - Z \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) + az\theta \end{aligned}$$

st.

(1) PARZEL, E.: Repertorium der höheren Analysis (1929) 13, Leipzig und Berlin, S. 1150.

(2)

Sei \mathfrak{x} ein Punkt im \mathbb{R}_3 und \mathfrak{x} eine Lösung von

$$(1) \quad \theta_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \theta_u + \frac{1}{\lambda} \theta_v = 0,$$

und setzen wir

$$(2) \quad \mathfrak{x}_u = p' \alpha', \quad \mathfrak{x}_v = q' \beta'$$

dann folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha'}{\partial v} = \left(-\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{a}{\partial v} \log p' \right) \alpha' - \frac{q'}{p' \lambda} \beta', \\ \frac{\partial \beta'}{\partial u} = -\frac{\sigma p'}{\lambda q'} \alpha' + \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log q' \right) \beta'. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(4) \quad \mathfrak{x}_u = e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} du} \cdot \alpha, \quad \mathfrak{x}_v = e^{-\int \frac{1}{\lambda} dv} \cdot \beta,$$

dann ergibt sich anstatt (3)

$$(5) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = n \beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = m \alpha,$$

wo m und n zwei Funktionen von u und v bedeuten, so dass

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(e^{-\int \frac{1}{\lambda} du} \right) = e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} du} n, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv} \right) = e^{-\int \frac{1}{\lambda} dv} m.$$

bestehen.

Aus (5), (6) folgen:

$$(7) \quad m \frac{\partial}{\partial u} (\alpha^2) = n \frac{\partial}{\partial u} (\beta^2),$$

$$(8) \quad m \frac{\partial}{\partial u} \left(e^{-\int \frac{1}{\lambda} du} \right) = n \frac{\partial}{\partial v} \left(e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv} \right),$$

$$\text{d. h.} \quad m e^{-\int \frac{1}{\lambda} du} = n \sigma e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv}$$

Also folgt aus (7), (8)

$$(9) \quad \frac{\frac{\partial}{\partial v}(\alpha^2)}{e^{-\int \frac{1}{\lambda} du}} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(\beta^2)}{\sigma e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv}},$$

und aus (4) ergibt sich

$$(10) \quad \frac{\frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\xi_u}{e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv}} \right)^2}{e^{-\int \frac{1}{\lambda} du}} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\xi_v}{e^{-\int \frac{1}{\lambda} du}} \right)^2}{\sigma e^{-\int \frac{\sigma}{\lambda} dv}}.$$

(3)

Weil

$$(1) \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u \partial v} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

gegen

$$(2) \quad u' = \varphi_1(u, v), \quad v' = \varphi_2(u, v),$$

invariant ist, so folgt aus (2)

$$(3) \quad \lambda' \frac{\partial \theta}{\partial u' \partial v'} + \sigma' \frac{\partial \theta}{\partial u'} + \frac{\partial \theta}{\partial v'} = 0,$$

wobei

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = \lambda \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v}, \\ 2\lambda' = \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v}, \\ 0 = \lambda \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v}, \end{cases}$$

sind.

Also folgt, dass, wenn φ_1, φ_2 zwei Lösungen von

$$\lambda du dv = 0$$

sind, (I) invariant ist.

Betrachten wir nun

$$\frac{\partial \xi'}{\partial u} = h \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial v} = l \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

wobei h, l zwei Funktionen von u, v und

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial v} \right)$$

sind, dann folgen aus (I)

$$\frac{\partial h}{\partial v} = (-l + h) \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = (l - h) \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

(4)

Setzen wir

$$(1) \quad \theta_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \theta_u + \frac{1}{\lambda} \theta_v = 0$$

in die Formen

$$(2) \quad \begin{cases} \theta_{uu} = a_1 \theta_u + b_1 \theta_v, \\ \theta_{vv} = a_2 \theta_u + b_2 \theta_v, \end{cases}$$

dann folgen

$$(3) \quad \begin{cases} (a_1)_v - \frac{\sigma}{\lambda} a_1 = - \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)_u - \frac{\sigma}{\lambda} a_1, & - \frac{1}{\lambda} a_1 + (b_1)_v = \\ & = - \left(\frac{1}{\lambda} \right)_u - \frac{\sigma}{\lambda} b_1, \quad b_1 = - \frac{1}{\lambda}, \\ - \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)_v + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{\lambda} = (a_2)_u + a_1 a_2 - \frac{\sigma b_2}{\lambda}, \\ \frac{\sigma}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)_v - \frac{b_2}{\lambda} = (b_2)_u + a_2 b_1 - \frac{b_2}{\lambda}. \end{cases}$$

Aus (3) folgen

$$a_1 = \frac{\lambda_u - \lambda_v + \sigma}{\lambda}, \quad b_1 = - \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\lambda_v}{\lambda^2} = (b_2)_u - \frac{a_2}{\lambda},$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sigma_v \lambda - \lambda_v \sigma}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda} \\
 & = (a_1)_u + \frac{\lambda_u - \lambda_v + \sigma}{\lambda} \cdot a_2 - \frac{\sigma b_2}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Unsere Integrabilitätsbedingung von (3) ist

$$\lambda \lambda_{uv} - \lambda_{vv} \lambda + \lambda \sigma_v - \lambda_u \lambda_v + \lambda_v^2 - \lambda_v \sigma + \sigma_u \lambda - \lambda_u \sigma = 0.$$

(5)

Wir betrachten

$$(1) \quad \lambda \xi'_{uv} + \sigma \xi'_u + \xi'_v = 0,$$

wobei

$$(2) \quad \xi'_u = p \xi_u, \quad \xi'_v = q \xi_v \quad (p, q \text{ skalar!})$$

sind, dann folgen aus (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \xi'_{uv} = p_v \xi_v + p \xi_{uv} \\ \xi'_u = p \xi_u \\ \xi'_v = q \xi_v \end{cases}$$

Setzen wir (3) in (1) ein, dann folgt⁽¹⁾

$$(4) \quad \lambda p \xi_{uv} + (\lambda p_v + \sigma p) \xi_u + q \xi_v = 0.$$

Aber

$$(5) \quad \xi_{uv} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \xi_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \xi_v$$

so folgen aus (4), (5)

$$(6) \quad \begin{cases} -\frac{p_v}{p} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ -\frac{q}{\lambda p} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

(1) Vergl. GRANFELD: Parallel maps of surfaces, Transactions of the American Math. Society 23 p. 302.

Aus (6) erhalten wir

$$\begin{cases} p = e^{-\int \left\{ \frac{12}{1} \right\} dv - \int \frac{\sigma}{\lambda} dv}, \\ q = -e^{-\int \left\{ \frac{12}{1} \right\} dv - \int \frac{\sigma}{\lambda} dv} \cdot \left\{ \frac{12}{2} \right\} \cdot \lambda, \end{cases}$$

so folgt

$$I = \frac{p}{q} = - \frac{1}{\left\{ \frac{12}{2} \right\} \cdot \lambda} \quad (6)$$

Wenn

$$(1) \quad x'_u = p x_{uv}, \quad x'_v = q x_{uv}$$

sind, dann folgt

$$(2) \quad (p - q) x_{uv} + p_v x_u - q_u x_v = 0.$$

Wenn

$$(3) \quad i x_{uv} + \sigma x_u + x_v = 0$$

(2) gleich ist, dann folgt

$$(4) \quad \frac{p - q}{\lambda} = \frac{p_v}{\sigma} = \frac{-q_u}{1}$$

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad \begin{cases} p = e^{-\int \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\sigma}{\lambda I} \right) dv}, \\ q = -\int \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda I} \right) e^{\int \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\sigma}{\lambda I} \right) dv} \cdot du, \end{cases}$$

also⁽¹⁾

$$I = \frac{p}{q} = - \frac{\int \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda I} \right) e^{\int \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\sigma}{\lambda I} \right) dv} \cdot du}{e^{\int \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\sigma}{\lambda I} \right) dv}}.$$

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: On some differential Equations IV, Journal of the Society of Tropical Agriculture vol. 5 (1933) p. 12, Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan.

(7)

Es seien

$$(1) \quad W_j = f(x_j) = U_j + iV_j, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

wo

$$(2) \quad x_j = U_j + iV_j$$

ist, und wir betrachten jetzt die beiden Flächen

$$(3) \quad \begin{cases} x_j = U_j(u, v), \\ \bar{x}_j = V_j(u, v), \end{cases}$$

wobei x_j, \bar{x}_j drei rechtwinklige Punktkoordinaten im R_3 und u, v zwei Parameter sind. Dann ergibt sich aus (3)

$$(4) \quad \begin{cases} F = -\bar{F}, \\ E = \bar{G}, \\ G = \bar{E}, \end{cases}$$

wobei $E, F, G; \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die bezüglichen Fundamentalgrößen erster Ordnung der Flächen sind; dann sind „Automecoic Curve“ und „Anti-automecoic Curve“ über F und \bar{F}

$$(5) \quad (E - \bar{G})du^2 + 2(F + \bar{F})du\,dv + (G - \bar{E})dv^2 = 0,$$

$$(6) \quad (E + \bar{G})du^2 + 2(F - \bar{F})du\,dv + (G + \bar{E})dv^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass (5) und (6) durch den Punkt (u, v) harmonisch konjugiert seien, ist die

$$(F - \bar{G})(G + \bar{E}) + (G - \bar{E})(E + \bar{G}) - 2(F + \bar{F})(F - \bar{F}) = 0,$$

d.h.

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2.$$

Bezeichnet man mit Δ_1, Δ_2 die Diskriminanten der beiden Gleichungen (5) und (6), so sind

$$A_1 = (G^2 + E^2 + 2F^2) - 2K,$$

$$A_2 = -(G^2 + E^2 + 2F^2) - 2K,$$

wenn unter K der gemeinsame Zähler

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$$

des Krümmungsmasses verstanden wird.

Es ist also auch⁽¹⁾

$$A_1 + A_2 = -4K.$$

Sind nun beide Flächen negativ gekrümmt, also K negativ, so ist eine der Grössen A_1 , A_2 sicher positiv, d.h. es sind mindestens zwei reelle voneinander verschiedene Richtungen jener Art vorhanden.

Ist K positiv, so ist die Summe $A_1 + A_2$ negativ. Aber man kann leicht zeigen, dass eine Diskriminante positiv sein muss, während die andere selbstverständlich negativ ausfällt, so dass in diesem Falle nur zwei reelle Richtungen vorhanden sind.

Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} E - \rho G & F(1 + \rho) \\ F(1 + \rho) & G - \rho E \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{d.h.} \quad 1 + \frac{2 - A^2 - B^2}{1 + AB} \rho + \rho^2 = 0,$$

hat bei

$$\left(\frac{2 - A^2 - B^2}{1 + AB} \right)^2 \geq 4,$$

$$\text{d.h.} \quad E - G \geq 2F, \quad E - G \leq 2F, \quad (F > 0),$$

nur reelle Wurzeln.

Sind die Richtungen von (5) und (6) Involution, dann werden die Doppelrichtungen mit⁽²⁾

(1) STÄCKEL, P.: Über Abbildungen Math. Annalen 44 (1894) S. 555.

(2) VOSS, A.: Über isometrische Flächen, Math. Ann. 46 (1895) S. 99.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du \, dv & du^2 \\ \bar{G} & -\bar{F} & \bar{E} \\ \bar{E} & \bar{F} & \bar{G} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. $-Fdu^2 + (E-G)du \, dv + Fdv^2 = 0$

gegeben.

Benutzt man die einander entsprechenden Kurvensysteme auf F_1 und F_2 als Koordinatenlinien

$$u = \text{const.}$$

und

$$v = \text{const.},$$

so mögen die Linienelemente ds_1 und ds_2 von F_1 und F_2 gegeben werden durch

$$ds_1^2 = Edu^2 + 2Fdu \, dv + Gdv^2,$$

$$ds_2^2 = Gdu^2 - 2Fdu \, dv + Edv^2.$$

Dann stellt die Gleichung

$$0 = a_{11}du^2 + 2a_{12}du \, dv + a_{22}dv^2$$

eine Doppelschar von Kurven dar, zwei Tangenten im Punkte (u, v) mit den Tangentenpaaren der Kurven

$$ds_1^2 = 0$$

und

$$ds_2^2 = 0$$

in demselben Punkte harmonisch sind, wenn die Koeffizienten a_{11} , a_{12} und den Bedingungen genügen:

$$0 = Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22},$$

$$0 = Ea_{11} + 2Fa_{12} + Ga_{22}.$$

Durch Elimination von a_{11} , $-a_{12}$ und a_{22} erhält man daher für die Tissotschen Orthogonalsysteme die Differentialgleichung,⁽¹⁾

$$\begin{array}{ccc|c} du^2 & du\,dv & dv^2 & \\ G & -2F & E & \\ E & 2F & G & \end{array} \Big| = 0.$$

Diese Gleichung stellt, solange ihre Diskriminante

$$\Delta = (E' - G^2)^2 + 4(FG + EF)^2$$

nicht identisch verschwindet, eine Doppelschar von Kurven dar, wobei E, F, G, reell sind.

Wir können die Beziehungen

$$L = \bar{M},$$

$$M = \bar{N},$$

$$N = -\bar{M}$$

erhalten, da

$$L = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{D}} \begin{vmatrix} \bar{x}_{uv} & \bar{y}_{uv} & \bar{z}_{uv} \\ \bar{x}_u & \bar{y}_u & \bar{z}_u \\ \bar{x}_v & \bar{y}_v & \bar{z}_v \end{vmatrix} = \bar{M}$$

$$M = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \bar{x}_{vv} & \bar{y}_{vv} & \bar{z}_{vv} \\ \bar{x}_u & \bar{y}_u & \bar{z}_u \\ \bar{x}_v & \bar{y}_v & \bar{z}_v \end{vmatrix} = \bar{N}$$

$$N = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \bar{x}_{uv} & \bar{y}_{uv} & \bar{z}_{uv} \\ \bar{x}_v & \bar{y}_v & \bar{z}_v \\ \bar{x}_u & \bar{y}_u & \bar{z}_u \end{vmatrix} = -\bar{M}$$

(1) OGURA, K.: Note on the representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 10 (1916) S. 90.

sind; bei unserer Transformation⁽¹⁾ verwandelt sich also

$$\frac{(EM-FL)}{d_1} - \frac{(GL-EN)}{d_2} k + \frac{(FN-GM)}{d_3} k^2 = 0,$$

in

$$\frac{(\bar{E}\bar{N} + \bar{F}\bar{M})}{\bar{d}_2} - \frac{(\bar{E}\bar{M} + \bar{G}\bar{N})}{\bar{d}_3} k + \frac{(\bar{F}\bar{M} - \bar{E}\bar{N})}{\bar{d}_4} k^2 = 0,$$

und die Differentialgleichung der Haupttangentialkurven transformiert sich in

$$\bar{M}du^2 + 2\bar{N}du\,dv - \bar{M}dv^2 = 0.$$

Durch unsere Transformation wird

$$\lambda\bar{\chi}_{uv} + \sigma\bar{\chi}_v - \bar{\chi}_u = 0$$

zu

$$(7) \quad L(\bar{\chi}) = \bar{\lambda}\bar{\chi}_{uv} + \bar{\sigma}\bar{\chi}_v - \bar{\chi}_u = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{N} = 0, \quad \bar{\sigma} &= \frac{\bar{G}\bar{E}_v - \bar{F}\bar{G}_u}{\bar{E}\bar{G}_u - \bar{F}\bar{E}_v}, \quad \frac{1}{2}\bar{\lambda} = \frac{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}{\bar{E}_v\bar{F} - \bar{G}_u\bar{E}}, \\ &- \bar{G}_u\bar{F} + \bar{G}_v\bar{G} + 2\bar{G}\bar{F}_u = 0 \end{aligned}$$

bestehen.

Wir multiplizieren den linearen Differentialausdruck $L(\bar{\chi})$ mit einer Funktion $\bar{\eta}$ und integrieren das Produkt über einen Bereich, dessen Rand eine geschlossene Kurve C ist.

Über die Kurve C seien dieselben Voraussetzungen gemacht, wie bei dem Gaussischen Satz (Divergenzsatz) in der Ebene.

Die Koeffizienten von (1) mögen in dem obigen Bereiche stetige zweite Ableitungen haben.

(1) SCHEFFERS, G.: Anwendung der Differential und Integralrechnung II (1922), Dritte Auflage S. 132.

(2) LEHMAN, S. J.: Über ein System von Fundamentalgrößen dritter Ordnung in der Flächentheorie, Sitzungsberichten der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien Bd. 126 (1917) S. 6.

Wir formen das Integral nach dem GAUSSschen Satze um; n bedeute die Richtung der inneren Normale, ds das (positiv genommene) Bogenelement der Randkurve C .

Man erhält

$$\begin{aligned} \iint (\bar{\lambda} \bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2}) du dv &= \iint \left[\bar{\lambda} \left(\bar{y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} - \bar{y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \right) + \bar{x} \bar{y} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u} \right] \times \\ &\quad \cos (nv) ds + \iint \bar{x} \frac{\partial (\bar{\lambda} \bar{y})}{\partial v^2} du dv, \\ - \iint \bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} du dv &= \iint \bar{x} \bar{y} \cos (nu) ds + \iint \bar{x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} du dv, \\ \iint \bar{\sigma} \bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} du dv &= - \iint \bar{\sigma} \bar{x} \bar{y} \cos (nv) ds - \iint \bar{x} \frac{\partial (\bar{\sigma} \bar{y})}{\partial v} du dv. \end{aligned}$$

Um es kurz zusammenzufassen, erhalten wir schliesslich eine Gleichung in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} &\int (\bar{x} L(\bar{x}) - \bar{x} M(\bar{y})) du dv \\ &= \int (\bar{y} P(\bar{y}) - \bar{y} P(\bar{x}) + \bar{y} \bar{x} R) ds; \end{aligned}$$

hierbei hat $M(\bar{y})$ die Bedeutung:

$$\begin{aligned} M(\bar{x}) &= \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v^2} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} + 2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial v} - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \right) \\ &\quad + \bar{y} \left(\bar{\lambda} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

und heisst der zu $L(\bar{x})$ adjungierte Differentialausdruck.

Mit $P(\bar{x})$ bezeichnen wir den Linieren Differentialausdruck

$$P(\bar{x}) = \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \cos (nv),$$

schliesslich mit R die sogenannte adjungierte Funktion

$$R = -\cos (nu) + \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial v} - \bar{\sigma} \right) \cos (nv).$$

Man beachte, dass der Differentialausdruck $M(\bar{y})$ durch den gegebenen Differentialausdruck $L(\bar{x})$ eindeutig bestimmt ist, während $P(\bar{x})$ und R auch von der Kurve C abhängen.

Wenn

$$(8) \quad \frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$$

besteht, dann nennt man die Punkte auf der Fläche Nabelpunkte oder Kreispunkte.

Durch unsere Transformation verwandelt sich (8) in

$$(9) \quad \frac{\bar{G}}{\bar{M}} = \frac{-\bar{F}}{\bar{N}} = \frac{\bar{E}}{-\bar{M}}.$$

Die überstrichenen Buchstaben beziehen sich auf die Elemente der Parallellfläche einer gegebenen Fläche (x, y, z) im Abstand a , dann transformieren sich

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{E} = (1 - a^2 K) E - a(2 - aH)L, \\ \bar{F} = (1 - a^2 K) F - a(2 - aH)M, \\ \bar{G} = (1 - a^2 K) G - a(2 - aH)N, \\ K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \end{cases}$$

in

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{\bar{G}} = (1 - a^2 \bar{K}) \bar{G} - a(2 - a\bar{H})\bar{M}, \\ -\bar{\bar{F}} = -(1 - a^2 \bar{K}) \bar{F} - a(2 - a\bar{H})\bar{N}, \\ \bar{\bar{E}} = (1 - a^2 \bar{K}) \bar{E} + a(2 - a\bar{H})\bar{M}, \end{cases}$$

wobei

$$\bar{K} = \frac{-\bar{N}' - \bar{M}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2},$$

$$\bar{H} = \frac{-\bar{G}\bar{M} + 2\bar{F}\bar{N} + \bar{E}\bar{M}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$$

sind.

(8)

S und S_1 seien zwei Flächen, die sich einander durch parallele Tangentenebenen und wir bezeichnen mit x, y, z ; x_1, y_1, z_1 als korrespondierenden Punkten auf diesen Flächen.

Setzen wir S und S_1 in den Formen :

$$(1) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma \frac{\partial x}{\partial u} + \tau \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{u.s.w.}$$

wo $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ Funktionen von u und v sind, dann folgt

$$(2) \quad \begin{cases} E_1 = \lambda' E + 2\lambda\mu F + \mu' G, \\ F_1 = \lambda\sigma E + (\lambda\tau + \mu\sigma)F + \mu\tau G, \\ G_1 = \sigma' E + 2\sigma\tau F + \tau' G. \end{cases}$$

wo E, F, G ; E_1, F_1, G_1 erste Fundamentalegrößen von S und S_1 sind.

Wenn

$$(3) \quad E_1 = F_1 = G_1 = E = F = G,$$

dann folgt aus (2)

$$(4) \quad \begin{cases} 1 = \lambda' + 2\lambda\mu + \mu', \\ 1 = \lambda\sigma + (\lambda\tau + \mu\sigma) + \mu\tau, \\ 1 = \sigma' + 2\sigma\tau + \tau', \end{cases}$$

d.h.

$$(5) \quad \lambda + \mu = \tau + \sigma.$$

Wenn

$$(6) \quad E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1$$

ist, dann folgt

$$(7) \quad \begin{cases} 0 = (\lambda' - 1)E + 2\lambda\mu F + \mu' G, \\ 0 = \lambda\sigma E + (\lambda\tau + \mu\sigma - 1)F + \mu\tau G, \\ 0 = \sigma' E + 2\sigma\tau F + (\tau' - 1)G, \end{cases}$$

d.h.

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2\lambda\mu & \mu^2 \\ \lambda\sigma & \lambda\tau + \mu\sigma - 1 & \mu\tau \\ \sigma^2 & 2\sigma\tau & \tau^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn

$$(9) \quad DD_1' + D''D_1 - 2D'D_1'' = 0$$

ist, dann folgt

$$(10) \quad \lambda = \tau = 0.$$

Wenn (5) möglich ist, dann ergibt sich aus (10):

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial u}, \end{cases} \quad \text{u.s.w.}$$

d.h.

$$E_1 = \mu G, \quad G_1 = \mu E, \quad F_1 = \mu F.$$

Aus (3) ergibt sich $\mu = 1$, so folgt

$$(11)' \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}, \end{cases} \quad \text{u.s.w.}$$

Wenn (8) besteht, dann folgt aus (10):

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x}{\partial u} \end{cases} \quad \text{u.s.w.}$$

wobei α eine Wurzel von

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

ist.

Aus (12) ergibt sich

$$(13) \quad \begin{cases} E_1 = \mu^2 G, \\ F_1 = \alpha^2 F, \\ G_1 = \frac{\alpha^2}{\mu^2} E, \end{cases}$$

d.h.

$$E_1 G_1 - F_1^2 = \alpha^2 (EG - F^2),$$

aber aus (6) muss $\alpha=1$ sein, das ist ein Widerspruch. Es folgt der

Satz: In unserem Falle existiert (6) nicht.

Ferner betrachten wir den Fall (11)', dann folgen

$$(14) \quad \begin{cases} (\xi_1)_u = \xi_v, \\ (\xi_1)_v = \xi_u, \end{cases}$$

$$E = F = G = E_1 = F_1 = G_1,$$

$$I_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} (x_1)_{uv} & (x_1)_v & (x_1)_u \\ (y_1)_{uv} & (y_1)_v & (y_1)_u \\ (z_1)_{uv} & (z_1)_v & (z_1)_u \end{vmatrix} = -M_1,$$

$$M = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} (x_1)_{vv} & (x_1)_v & (x_1)_u \\ (y_1)_{vv} & (y_1)_v & (y_1)_u \\ (z_1)_{vv} & (z_1)_v & (z_1)_u \end{vmatrix} = -N_1,$$

$$N = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (x_1)_{uv} & (x_1)_v & (x_1)_u \\ (y_1)_{uv} & (y_1)_v & (y_1)_u \\ (z_1)_{uv} & (z_1)_v & (z_1)_u \end{vmatrix} = -M_1,$$

so geht

$$(15) \quad L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$$

in

$$(16) \quad M_1 du^2 + 2N_1 du dv + M_1 dv^2 = 0$$

über, also erhalten wir den⁽¹⁾

(1) EISENHART: Associate Surfaces, Math. Ann. Bd. 62 (1906) S. 507.

Satz: Durch unsere Transformation geht (15) in (16) über.

(9)

Man kann bei

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= \varphi_1(u', v'), \quad v = \varphi_2(u', v'), \\ \lambda \xi_{uu} v' + \sigma \xi_{uv} + \xi_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

in die Form

$$(2) \quad \alpha \xi_{uu} + 2\beta \xi_{uv} + \gamma \xi_{vv} + \delta \xi_u + \varepsilon \xi_v = 0$$

übertragen, weil aus

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \lambda \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'}, \\ \beta = \lambda' \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right), \\ \gamma = \lambda \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'}, \end{cases}$$

α, β, γ zu bestimmen sind. Nun das System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(4) \quad \begin{cases} \omega \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = 0, \\ \nu \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = \bar{\xi} \end{cases}$$

ist, wie die Elimination von $\bar{\xi}$ zeigt, äquivalent der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(5) \quad \begin{cases} \omega \nu \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial u^2} + (\omega \rho + \mu \nu) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial u \partial v} + \mu \rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial v^2} \\ + \left(\omega \frac{\partial \nu}{\partial u} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} + \left(\omega \frac{\partial \rho}{\partial u} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Soll nun umgekehrt die Gleichung (2) auf ein System (4) zurückführbar sein, so muss dieselbe die Form (5) besitzen, d.h. es muss möglich

sein, durch die Bestimmung der vier Grössen ω , μ , ν , ρ den fünf Gleichungen :

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha = \omega\nu, & 2\beta = \omega\rho + \mu\nu, & \gamma = \mu\rho, \\ \delta = \omega \frac{\partial \nu}{\partial u} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial v}, & \varepsilon = \omega \frac{\partial \rho}{\partial u} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial v} \end{cases}$$

identisch zu genügen.

Aus (6) folgt

$$\omega\rho + \mu\nu = 2\beta,$$

Wir wollen

$$\omega\rho - \mu\nu = \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} = 2\Delta$$

setzen ; also :

$$\omega\rho = \beta + \Delta, \quad \mu\nu = \beta - \Delta \quad \text{und}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{\nu}, \quad \mu = \frac{\beta - \Delta}{\nu}, \quad \frac{\rho}{\nu} = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}.$$

Die Werte von ω , μ in den letzten beiden Gleichungen (6) eingesetzt, sind :

$$\nu\delta = \alpha \frac{\partial \nu}{\partial u} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \nu}{\partial v},$$

$$\nu\varepsilon = \alpha \frac{\partial \rho}{\partial u} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Bildet man

$$-\nu\delta \frac{\rho}{\nu^2} + \nu\varepsilon \frac{1}{\nu},$$

so kommt

$$\varepsilon - \delta \frac{\rho}{\nu} = \alpha \frac{\partial}{\partial u} \frac{\rho}{\nu} + (\beta - \Delta) \frac{\partial}{\partial v} \frac{\rho}{\nu}.$$

Dieser Differentialgleichung muss $\frac{\rho}{\nu} = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}$ genügen.

Setzen wir noch :

$$(7) \quad L = \varepsilon - \frac{\beta + \Delta}{\alpha} \delta - \alpha \frac{\partial}{\partial u} \frac{\beta + \Delta}{\alpha} - (\beta - \Delta) \frac{\partial}{\partial v} \frac{\beta + \Delta}{\alpha},$$

so wird die Bedingung für die Auflösbarkeit von (6): $L=0$. Diese Methoden sind auf das Resultat von §2, §3 und §4 anwendbar.

(3) Ueber konvexe Kurven und Flächen.

Wenn "Medial surface"⁽¹⁾ einen Nabelpunkt hat, dann ergibt sich

$$\rho_u - \rho'_u = \rho_v - \rho'_v,$$

wobei $\rho_u, \rho_v; \rho'_u, \rho'_v$ Hauptkrümmungsradien im Gegenpunkte der Eifläche sind.

Auch besteht zwischen $\rho_u, \rho_v; \rho'_u, \rho'_v$ die Beziehung

$$\frac{\partial k_2}{\partial u^2} - \frac{\partial k_1}{\partial v^2} = \frac{2}{k_2 - k_1} \left\{ \left(\frac{\partial k_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial k_1}{\partial v} \right)^2 \right\} + k_1 k_2 (k_2 - k_1),$$

wobei

$$k_1 = \frac{2}{\rho_u - \rho'_u} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{2}{\rho_v - \rho'_v}$$

sind.⁽²⁾

Für den Winkel α der Haupttangenten mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung ist⁽³⁾

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{-\frac{\rho_v - \rho'_v}{\rho_u - \rho'_u}}.$$

(4) Über Minkowskis gemischten Flächeninhalt

Sind p und q die Abstände des Ursprungs O von den Stützgeraden zwei geschlossener konvexer Kurven (Eiliniien) und $s(p), s(q)$ die zugehörigen Bogenlängen, so ist

- (1) GANAPATI, P.: On central Ovals, The Journal of the Indian Mathematical Society, vol. XIX (1932) p. 225.
- (2) HAYASHI, T.: On a theorem due to Prof. NAKAJIMA in the theory of surface, Tôhoku Math. Journ. vol. 31 (1929) s. 427.
- (3) SCHAFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922) S. 557.

$$(1) \quad F_{12} = -\frac{1}{2} \oint p \, ds(q) = -\frac{1}{2} \oint q \, ds(p)$$

bekanntlich der sog. gemischte Flächeninhalt der Eibereiche (p) und (q) .

Insbesondere sind

$$(2) \quad F_{11} = F(p), \quad F_{22} = F(q)$$

die gewöhnlichen Flächeninhalte von (p) bzw. (q) .

Nach H. MINKOWSKI besteht für die Grössen F_{ik} die Ungleichung

$$(3) \quad F_{12}^2 \geq F_{11} F_{22}$$

in der das Gleichzeichen dann und nur dann gültig ist, wenn (p) zu (q) homothetisch, d.h. ähnlich und ähnlich gelegen ist.¹⁾

Favard⁽¹⁾ hat für den gemischten Flächeninhalt eine obere und eine untere Schranke angegeben, welche ausser von den Flächeninhalten auch von den Umfängen von (p) und (q) abhängen.

Wir wollen hier jene Formeln dadurch verallgemeinern, dass wir dabei die Umfänge durch gemischte Flächeninhalte von (p) und (q) bezüglich einer dritten Eilinie (r) ersetzen, deren Flächeninhalt

$$F_{33} = F(r)$$

dann auch noch in die Abschätzungen eingehen wird.

Es ist

$$F_{ss} = F(p + sr) = F_{11} + 2sF_{13} + s^2F_{33},$$

$$F_{tt} = F(q + tr) = F_{22} + 2tF_{23} + t^2F_{33},$$

$$F_{st} = -\frac{1}{2} \oint (p + sr) ds(q + tr)$$

$$= -\frac{1}{2} \oint (p + sr) [\rho(q) + t\rho(r)] d\varphi$$

$$= S_{12} + sS_{23} + tS_{13} + stS_{33}.$$

Analog (3) ist nun

$$F_{st}^2 \geq F_{ss} F_{tt}.$$

(1) FAVARD: Sur les inégalités de MINKOWSKI, Matematisk Tidsskrift B, 1930.

Daraus folgt für alle positiven Werte s, t nach einer kurzen Rechnung

$$(4) \quad \begin{aligned} & s^2(F_{22}^2 - F_{22}F_{33}) - 2st(F_{13}F_{23} - F_{13}F_{33}) + t^2(F_{13}^2 - F_{11}F_{33}) \\ & + 2s(F_{12}F_{23} - F_{13}F_{22}) + 2t(F_{12}F_{13} - F_{22}F_{11}) \\ & + (F_{12}^2 - F_{11}F_{22}) \geq 0. \end{aligned}$$

Es ist nun schon entweder

$$F_{12}F_{33} > F_{11}F_{22},$$

oder

$$F_{12}F_{33} \leq F_{11}F_{22}.$$

Beim Ersteren ist die nachher abgeleitete Formel (1) erst recht gültig, und auch folgt, da die quadratischen Bestandteile das Vorzeichen nicht wechseln dürfen, aus dem Letzteren.

$$(I) \quad F_{12}F_{33} \geq F_{11}F_{22} \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{F_{11}F_{33}}{F_{13}^2}\right) \left(1 - \frac{F_{22}F_{33}}{F_{23}^2}\right)} \right].$$

Dies liefert eine untere Schranke für S_{12} .

Wir wollen nun eine entsprechende obere Schranke herleiten.

Es ist:

$$F_{13}(sp + tq, r) = \frac{1}{2} \oint (sp + tq) ds(r) = sF_{13} + tF_{23},$$

$$F(sp + tq) = s^2F_{11} + 2stF_{12} + t^2F_{22},$$

also analog (3):

$$(sF_{13} + tF_{23})^2 \geq F_{33} \cdot [s^2F_{11} + 2stF_{12} + t^2F_{22}]$$

oder

$$(5) \quad s^2(F_{13}^2 - F_{11}F_{33}) + 2st(F_{13}F_{23} - F_{12}F_{33}) + t^2(F_{23}^2 - F_{22}F_{33}) \geq 0.$$

Ist hier

$$F_{13}F_{23} - F_{12}F_{33} \geq 0,$$

so gilt die spätere Ungleichung (II) erst recht.

Andernfalls folgt aber, da die letzte Ungleichung für alle positiven s, t gilt,^{a)}

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über Minkowskis gemischten Flächen, Jap. Journ. of Math. Vol. IX (1933) p. 161.

$$(II) \quad F_{12}F_{33} \leq F_{13}F_{23} \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{F_{11}F_{33}}{F_{13}^2}\right) \left(1 - \frac{F_{22}F_{33}}{F_{23}^2}\right)} \right].$$

Aus (I) und (II) folgt noch bei einem Vergleich von (4) und (5), dass die quadratische Form (5) für alle möglichen s, t semi-definit ist.

Schreiben wir für die eckigen Klammern in (I) und (II) (123) bzw. [123], so ergibt sich bei zyklischer Vertauschung aus (I) und (II):

$$(III) \quad (123) (231) (312) \leq \frac{F_{11}F_{22}F_{33}}{F_{22}F_{23}F_{31}} \leq [123] [231] [312],$$

wo die Gleichheitszeichen für homothetische Eiliniien gültig sind.

(5) Über gemischte Volumina im vierdimensionalen Raum

1. Es seien

$$H_1, \dots, H_4$$

die Stützfunktionen von Eikörpern im R_4 .

Das Volumen des Eikörpers mit der Stützfunktion

$$(1) \quad H = \sum_1^4 \tau_i H_i \quad (\tau_i > 0)$$

ist dann

$$(2) \quad V(H) = \sum_1^4 \frac{V_{iklm}}{i, k, l, m} V_{iklm} \tau_i \tau_k \tau_l \tau_m.$$

Hierin heissen die Koeffizienten

$$V_{iklm} = V(H_i, H_k, H_l, H_m)$$

nach MINKOWSKI bekanntlich gemischte Volumina.

Ist speziell

$$\tau_1 + \tau_2 = 1,$$

$$\tau_3 = \tau_4 = 0,$$

so gilt der Satz von BRUNN und MINKOWSKI

$$(3) \quad \sqrt[4]{V(H)} \geq \tau_1 \sqrt[4]{V(H_1)} + \tau_2 \sqrt[4]{V(H_2)},$$

aus dem dann z. B. mit Hilfe von (2) folgt:

$$(4) \quad V_{1112}^2 \geq V_{1111} V_{1122} [V_{1111} = V(H_1)].$$

Nach einem Hinweis von W. SŪsz will ich hieraus eine weitergehende Ungleichung herleiten, von der (4) ein Sonderfall ist.

Ich behaupte nämlich, es ist

$$(5) \quad V_{1122}^2 \geq V_{1122} V_{1133}$$

Um (5) aus (4) zu erhalten, schliesse ich mich dem MINKOWSKI (Ges. Abh. II, S. 260, Nr. 38) an.

Wir setzen

$$(6) \quad P_{ikl} = \sum_{\mu}^4 \tau_{\mu} V_{,kl\mu}.$$

Dann ist für

$$H' = \sum_i^4 \sigma_i H_i (\sigma_i > 0):$$

$$V(H, H, H, H) = V(H) = V_{1111}(H) = \sum_{i,k,l}^4 P_{ikl} \tau_i \tau_k \tau_l,$$

$$V(H, H, H, H') = V_{1112}(H, H') = \sum P_{ikl} \tau_i \tau_k \tau_l,$$

$$V(H, H, H', H') = V_{1122}(H, H') = \sum P_{ikl} \tau_i \sigma_k \sigma_l.$$

Wenden wir jetzt (4) auf die neuen Grössen

$$V(H, H') \quad \text{u. s. w.}$$

an, dann erhalten wir

$$(\sum P_{ikl} \tau_i \tau_k \sigma_l)^2 \geq (\sum P_{ikl} \tau_i \tau_k \tau_l) (\sum P_{ikl} \tau_i \sigma_k \sigma_l).$$

Nun sei noch

$$\sigma_i = t \tau_i + \rho_i,$$

wobei ρ_i beliebige reelle Zahlen sind und t so gross, dass

$$\sigma_i > 0 \text{ ist.}$$

Dann wird

$$(\sum P_{ikl} \tau_i \tau_k \rho_l)^2 \geq (\sum P_{ikl} \tau_i \tau_k \tau_l) (\sum P_{ikl} \tau_i \rho_k \rho_l)$$

Jetzt setzen wir

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0, \quad \tau_4 = 1.$$

Dann wird nach (6)

$$\left(\sum_1^4 V_{33kl} \rho_l \right)^2 \geq V_{3333} \left(\sum_1^4 V_{33kl} \rho_k \rho_l \right).$$

Hierin sei noch $\rho_3 = \rho_4 = 0$:

$$(V_{3331} \rho_1 + V_{3332} \rho_2) \geq V_{3333} \left(\sum_1^2 V_{33kl} \rho_k \rho_l \right).$$

Da die ρ_i beliebige reelle Zahlen sein dürfen, kann die linke Seite zum Verschwinden gebracht werden.

Es muss also aus der quadratischen Form rechter Seite, welche für positive

$$\rho_k, \quad \rho_l$$

positiv ist, auch ≤ 0 gemacht werden können; ihre Diskriminante muss also der behaupten Ungleichung (5) genügen, w.z.b.w.

Es fragt sich, ob man auf diese Weise auch eine entsprechende Ungleichung für das allgemeinste gemischte Volumen ν_{1234} erhalten könne.

Im R_n tritt an die Stelle von (4)

$$(4') \quad V_{11 \dots 12}^2 \geq V_{11 \dots 11} V_{11 \dots 122}$$

und man gewinnt daraus auf ähnliche Weise die der (5) analoge Ungleichung

$$(5') \quad V_{11 \dots 122}^2 \geq V_{11 \dots 1122} \cdot V_{11 \dots 133}$$

2. Wir wollen nächst hier eine Integraldarstellung durch die Relativkrümmungsradien der Hyperflächenpaare mit den Stützfunktionen H_1, H_2, H_3 angeben.

Ist do_i das Oberflächenelement von (H_i) , so ist bekanntlich

$$(1) \quad V_{1112} = -\frac{1}{4} \int H_1 do_1 = \frac{1}{12} \int H_1 p_{12} do_2,$$

wobei

$$(2) \quad p_{12} \equiv (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)_{12}$$

und die R_i die Relativkrümmungsradien von (H_1) bezüglich (H_2) als Eifläche sind.

Für Relativkrümmungslinien-Parameter von (H_1) zu (H_2) erhält man ferner

$$\begin{aligned} & V(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2, \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2, \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2, H_3) \\ &= -\frac{1}{4} \int H_1 do(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) \\ &= \frac{1}{4} \int H_1 \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(R_1)_{12}} \right] \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(R_2)_{12}} \right] \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(R_3)_{12}} \right] do_1 \\ &= \sum_0^3 \binom{3}{\alpha} \lambda_1^\alpha \lambda_2^{3-\alpha} v_{11}, \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich und Beachtung der Symmetrie in den Indices 1 und 2 erhält man daraus

$$\begin{aligned} \nu_{112} &= \frac{1}{12} \int H_3 p_{12} do_2 \\ &= \frac{1}{12} \int H_2 p_{12} do_1 \\ (3) \quad &= \frac{1}{12} \int H_2 S_{21} do_1 \\ &= \frac{1}{12} \int H_2 S_{11} do_1. \end{aligned}$$

Wenn

$$S_{21} = (R_1 + R_2 + R_3)_{21}$$

ist, so ist (3) die beabsichtigte Erweiterung von (1).

Auch hier bleibt die Frage nach entsprechender Behandlung des allgemeinsten gemischten Volumens unbeantwortet.⁽¹⁾

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über gemischte Volumina in vierdimensionalen Raum, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1932) p. 132.

(6) Über konvex-geschlossene Flächen

Aus meiner Arbeit⁽¹⁾ folgt der

Satz: Die Fläche ist dann und nur dann von konstanter Affin-helligkeit ($R + \bar{R} = \text{const.}$), oder die Affinkugel, wenn die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte \mathfrak{z} , \mathfrak{z}' von Gegenpunkten zusammen oder komt. Abstand haben, wobei

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + R\mathfrak{y}$$

ist.⁽²⁾

Geht man von einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ dadurch zu einer Parallelfäche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + n\mathfrak{z}$ über, so erhält man

$$(1) \quad n = \text{const.} \quad (\text{Parallelfäche})$$

oder

$$(2) \quad n + \bar{n} = \text{const.}$$

Aus (2) folgt

$$n = \text{const.} \quad (\text{Parallelfäche}).$$

Man kann auch über projektive Krümmungsmittelpunkte ähnliches Resultat erhalten.⁽³⁾

(1) MATSUMURA, S.: Über konvex-geschlossene Flächen, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1933) p. 193.

(2) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Berlin (1923) S. 158.

(3) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie (1), Berlin (1930) S. 119.

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (III)

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, January 20th, 1933)

(1) Betrachten wir die Kreisscharen⁽¹⁾ im R_3 :

$$(1) \quad \varphi^* = p^* \xi^* + q^* \eta^* \quad [a=I, II]$$

wo p^* , q^* die skalaren Grössen bedeuten.

Setzen wir

$$(2) \quad A(\varphi\varphi) = (\varphi^* \varphi^*),$$

so erhalten wir durch Büscheltransformation

$$\begin{aligned} A(\varphi\varphi) &= (p^* \xi^* + q^* \eta^*)(p^* \xi^* + q^* \eta^*) \\ (3) \quad &= (p^*)^2 (\xi^* \xi^*) + p^* q^* [(\xi^* \eta^*) + (\eta^* \xi^*)] \\ &\quad + (q^*)^2 (\eta^* \eta^*). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(4) \quad \begin{cases} (\xi^* \xi^*) = A(\xi\xi), \\ (\eta^* \xi^*) = A(\xi\eta) = A(\eta\xi), \\ (\eta^* \eta^*) = A(\eta\eta), \end{cases}$$

so folgt

$$(5) \quad A(\varphi\varphi) = p^* A(\xi\xi) + 2p^* q^* A(\xi\eta) + q^* A(\eta\eta).$$

Man kann somit $A(\varphi\varphi)$ als binäre quadratische Form in den Ver-

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (XI), Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931) p. 194.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 7, April, 1933.]

änderlichen p^* und q^* ansehen; es lässt sich leicht zeigen, dass (5) positiv definit ist, d. h. nicht negativ wird, welchen Wert p^* und q^* auch haben mögen.

Ist in der Tat⁽²⁾

$$\begin{aligned} 0 &< p^* A(\xi\xi) + 2p^* q^* A(\xi\eta) + q^* A(\eta\eta) \\ &= \frac{1}{A} [\{ p^* A(\xi\xi) + q^* A(\xi\eta) \}^2 \\ &\quad + (q^*)^2 \{ A(\xi\xi) A(\eta\eta) - A(\xi\eta)^2 \}], \end{aligned}$$

so muss

$$A(\xi\xi)A(\eta\eta) - A(\xi\eta)^2 > 0$$

sein, damit (5) positiv definit sei.

(2) Wir betrachten zwei Kreise im R_n , bei denen alle Kugeln durch den einen Kreis den Winkel φ mit dem andern bilden.

Ist

$$\eta = \rho_a x^a$$

eine normierte Kugel durch einen Kreis \mathfrak{K} im R_n , wobei

$$(1) \quad \eta\eta = \rho_a \rho_b A^{ab} = 1$$

ist, so muss

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \rho_b T^{ab}$$

sein.

Betrachten wir k in dem Falle, dass $\cos^2 \varphi$ diesen Wert annähme, dann haben wir aus (1) und (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \rho_a \rho_b A^{ab} = 1, \\ \rho_a \rho_b T^{ab} = K. \end{cases}$$

Wenn

$$\rho_a \rho_b T^{ab}$$

(2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (V), Tôhoku Math. Journ. vol 32 (1939) p. 153.

eine quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten ist, so gilt sicher $(T^{12})^2 - T^{11} \cdot T^{22} > 0$, d. h. die Form ist also indefinit.

Wenn (ρ_1, ρ_2) alle Paare von ganzen rationalen Zahlen mit Ausnahme des Paares $(0, 0)$ durchläuft, so durchläuft die Form eine abzählbare Menge von reellen Zahlen, und man kann nach der unteren Grenze der absoluten Beträge dieser Zahlen fragen.

Eine Abschätzung dieser unteren Grenze ist enthalten in dem folgenden von KORKINE, ZOLOTAREFF und MARKOFF bewiesenen⁽¹⁾

Satz: Sind T^{11}, T^{12}, T^{22} reelle Zahlen $(T^{12})^2 - T^{11} \cdot T^{22} > 0$, so gibt es unendlich viele Paare von ganzen rationalen Zahlen ρ_1, ρ_2 für welche

$$|\cos \varphi| = |\rho_1^2 T^{11} + 2\rho_1 \rho_2 T^{12} + \rho_2^2 T^{22}| \leq \frac{2\sqrt{(T^{12})^2 - T^{11} \cdot T^{22}}}{\sqrt{5}}$$

ist.

(3) Eine binäre quadratische Form

$$(1) \quad (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \equiv T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2$$

geht durch die Buschelsubstitution

$$(2) \quad \rho_1 = x\bar{\rho}_1 + \lambda\bar{\rho}_2, \quad \rho_2 = \mu\bar{\rho}_1 + \nu\bar{\rho}_2$$

in

$$(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22}) \equiv \bar{T}^{11}\bar{\rho}_1^2 + 2\bar{T}^{12}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{T}^{22}\bar{\rho}_2^2$$

über, wobei

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{T}^{11} = T^{11}x^2 + 2T^{12}x\mu + T^{22}\mu^2, \\ \bar{T}^{12} = T^{11}x\lambda + T^{12}(x\nu + \lambda\mu) + T^{22}\mu\nu, \\ \bar{T}^{22} = T^{11}\lambda^2 + 2T^{12}\lambda\nu + T^{22}\nu^2, \end{cases}$$

d. h.

(1) Vgl. MARROFF, A.: Sur les formes quadratiques binaires indefinies, Math. Annalen 15 (1879), S. 381-406.

PERRON, O.: Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen, Math. Zeitschrift 35 (1932), S. 563.

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} x, & \lambda \\ \mu, & \nu \end{pmatrix} = (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22});$$

also⁽¹⁾ folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} -x, & -\lambda \\ -\mu, & -\nu \end{pmatrix} &= (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \\ (-T^{11}, T^{12}, -T^{22}) \begin{pmatrix} -x, & \lambda \\ \mu, & -\nu \end{pmatrix} &= (-\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, -\bar{T}^{22}) \\ (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22}) \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -1, & a \end{pmatrix} &= (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \\ (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} -\delta, & \beta \\ 1, & -a \end{pmatrix} &= (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22}) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -1, & a \end{pmatrix}} \right\} \text{ wo } a\delta - \beta = 1.$$

Wenn T^{22} invariant ist, dann folgt aus (3)

$$\begin{vmatrix} (x^2-1) & x\mu & \mu^2 \\ x\lambda & (x\nu + \mu-1) & \mu\nu \\ \lambda^2 & \lambda\nu & \nu^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch die Substitution

$$\rho_1 = a\bar{\rho}_1 + \beta\bar{\rho}_2,$$

$$\rho_2 = \gamma\bar{\rho}_1 + \delta\bar{\rho}_2,$$

wird (1) in ein zweites Quadrat

$$A\bar{\rho}_1^2 + B\bar{\rho}_2^2$$

transformiert.

Durch Einführung der Ausdrücke ρ_1 und ρ_2 in die Transformationsgleichung

$$T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2 = A\bar{\rho}_1^2 + B\bar{\rho}_2^2$$

ergeben sich sofort die drei Gleichungen

$$T^{11}a^2 + 2T^{12}a\gamma + T^{22}\gamma^2 = A$$

$$T^{11}a\beta + T^{12}(a\delta + \beta\gamma) + T^{22}\gamma\delta = 0$$

(1) GMEINER, J. A.: Über die zahlentheoretische Reduktion der binären quadratischen Formen, Sitzungsberichten der Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 127 (1918) S. I.

$$T^{11}\beta' + 2T^{12}\beta\delta + T^{22}\delta' = B.$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen dienen dazu, die neuen Koeffizienten A, B aus den gegebenen Formen T^{11} , T^{12} , T^{22} zu bestimmen; die zweite enthält die von den Substitutionskoeffizienten zu erfüllende Bedingung, damit die gegebene Form in ein Aggregat zweier Quadrate übergehe.

Eine wesentliche Aufgabe ist daher, die Gleichung

$$T^{11}a\beta + T^{12}(a\delta + \gamma\beta) + T^{22}\gamma\delta = 0$$

aufzulösen.

Der blosse Anblick dieser Gleichung führt sofort zu der Beschränkung, die man den gegebenen Formen T^{11} , T^{12} , T^{22} und auch den Unbekannten a , β , γ , δ auferlegen darf, ohne der Allgemeinheit der Lösung wesentlich Eintrag zu tun.

(4) Es seien zwei Kreise \mathfrak{K} , $\bar{\mathfrak{K}}$ im R_1 gegeben.

Ist

$$\eta = \rho_a x^a$$

eine normierte Kugel im R_1 durch \mathfrak{K} , so können wir

$$(1) \quad \eta\eta = \rho_a \rho_a A^{aa} = 1$$

einsetzen.

Dann muss

$$(2) \quad \cos \varphi = T^{aa} \rho_a \rho_a$$

sein, wo φ den Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{K}}$ bedeutet.

Wenn

$$(3) \quad \cos \varphi = x^2 \quad (x \leq 1)$$

ist, dann folgt aus (3)

$$(4) \quad (T^{11} - x^2 A^{11})\rho_1^2 + 2(T^{12} - x^2 A^{12})\rho_1 \rho_2 + (T^{22} - x^2 A^{22})\rho_2^2 = 0$$

Nun betrachten wir die folgenden Kreisscharen

$$(5) \quad a\rho_1^2 + 2b\rho_1\rho_2 + c\rho_2^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass (4) und (5) gemeinsame Wurzeln haben, ist die, dass

$$(6) \quad R \equiv [(T^{11} - x^2 A^{11})c - (T^{22} - x^2 A^{22})a]^2 \\ + 4[(T^{12} - x^2 A^{12})a - (T^{11} - x^2 A^{11})b] \times \\ \times [(T^{12} - x^2 A^{12})c - (T^{22} - x^2 A^{22})b] = 0,$$

oder in der BOOLEschen Form

$$(7) \quad R = [(T^{11} - x^2 A^{11})c + (T^{22} - x^2 A^{22})a - 2(T^{12} - x^2 A^{12})b]^2 - \\ - 4[(T^{11} - x^2 A^{11})(T^{22} - x^2 A^{22}) - (T^{12} - x^2 A^{12})^2](ac - b^2) = 0 \text{ ist.}$$

Also folgt der

Satz: Die Bedingung dafür, dass zwei Kurvenscharen (4) und (5) gemeinsame Wurzeln haben, muss (6) oder (7) sein.

(5) Wir betrachten nun

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \lambda^2,$$

wobei λ ein Parameter ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad A - \lambda^2 B = 0,$$

wobei

$$(3) \quad \begin{cases} A \equiv T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \\ B \equiv A^{11} \rho_1^2 + 2B^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2 = 1, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} A \equiv \sum T^{ik} \rho_i \rho_k, \\ B \equiv \sum A^{ik} \rho_i \rho_k = 1, \end{cases} \\ (i, k = 1, 2)$$

sind.

Dann beschäftigen wir uns mit dem Ausdruck

$$(4) \quad A - \lambda^2 B,$$

Dann ist

$$(5) \quad D \equiv \sum \pm (T^{11} - \lambda^2 A^{11})(T^{22} - \lambda^2 A^{22})$$

die Determinante der Schar (4).

Wir verstehen unter λ^2 eine willkürliche Veränderliche und setzen

$$A - \lambda^2 B = C,$$

wobei

$$C = \sum c^{ik} \rho^i \rho^k \quad (i, k = 1, 2)$$

ist, so ist also

$$C^{ik} = T^{ik} - \lambda^2 A^{ik}$$

und die Determinante

$$|C| = |T - \lambda^2 A| = \begin{vmatrix} T^{11} - \lambda^2 A^{11} & T^{12} - \lambda^2 A^{12} \\ T^{12} - \lambda^2 A^{12} & T^{22} - \lambda^2 A^{22} \end{vmatrix}$$

von C verschwindet nicht identisch, da

$$|T| \neq 0$$

ist.

Wir setzen, unter σ_1, σ_2 neue Veränderliche verstanden,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial \rho_1} \sigma_1 + \frac{\partial A}{\partial \rho_2} \sigma_2 \right) = P_a$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho_1} \sigma_1 + \frac{\partial B}{\partial \rho_2} \sigma_2 \right) = P_b.$$

Die symmetrischen bilinearen Formen P_a und P_b heißen die Polarformen von A bzw. B.

Für $\rho_i = \sigma_i$ ($i=1, 2$) geht P_a in A, P_b in B, also die Schar $T - \lambda^2 A$ von symmetrischer bilinearer Form in die Schar $T - \lambda^2 A$ von quadratischer Form über, da

$$P_a = \sum T^{ik} \rho_i \rho_k, \quad P_b = \sum A^{ik} \rho_i \rho_k$$

$$(i, k = 1, 2)$$

sind.

Es ist ferner

$$(6) \quad |T - \lambda^2 A| = |P_a - \lambda^2 P_b|$$

Durch die Substitution

$$(7) \quad \rho_i = a_{i1}' \rho_1 + a_{i2}' \rho_2$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$\sum \pm a_{1i} a_{22} = \Delta$$

gehe nun A in \mathfrak{A} , B in \mathfrak{B} über.

Setzen wir noch

$$\mathfrak{A} = \sum T^{ik'} \rho_i' \rho_k, \quad \mathfrak{B} = \sum A^{ik'} \rho_i' \rho_k \quad (i, k=1, 2)$$

und

$$(8) \quad \sigma^i = a_{1i}' \sigma_1 + a_{2i}' \sigma_2 \quad (i=1, 2),$$

so geht bekanntlich durch die kongruenten Transformationen (7) und (8) P_a in

$$P_a = \sum T^{ik'} \rho_i' \sigma_k \quad (i, k=1, 2),$$

P_b in

$$P_b = \sum A^{ik'} \rho_i' \sigma_k \quad (i, k=1, 2),$$

also die Schar

$$P_a - \lambda^2 P_b$$

in die Schar

$$P_a - \lambda^2 P_b$$

über.

Auch das Umgekehrte ist richtig: Geht durch die kongruenten Transformationen (7) und (8) P_a in P_a so über, geht durch (7) A in \mathfrak{A} über, u. s. w.

Nun ist

$$|P_a - \lambda^2 P_b| = \Delta \cdot |P_a - \lambda^2 P_b| \cdot \Delta,$$

also wegen (6) muss auch

$$|A - \lambda^2 B| = \Delta^2 |A - \lambda^2 B|$$

sein.

(6) Betrachten wir nun die beiden Kurvenscharen

$$(1) \quad \text{const.} = l_{11} dt^2 + 2l_{12} dt d\tau + l_{22} d\tau^2 \equiv A,$$

$$(2) \quad \text{const.} = (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 \equiv A.$$

(2) ist dann die Kurvenschar von Minimallinien, wobei constant immer Null gleich ist.

Setzen wir

$$\frac{(\theta_\tau \theta_\tau) l_{11} - 2(\theta_i \theta_\tau) l_{12} + (\theta_i \theta_i) l_{22}}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} = H(A, A)$$

$$\frac{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} = K(A, A),$$

dann folgen

$$\cos \omega = \varepsilon \frac{H(A, A)}{\sqrt{H(A, A)^2 - 4K(A, A)}}$$

$$\sin \omega = \varepsilon' \frac{2\sqrt{-K(A, A)}}{\sqrt{H(A, A)^2 - 4K(A, A)}},$$

wobei ω den Winkel zwischen (1) und (2) bedeutet, und ε und ε' als + oder - bezeichnet werden.

(7) Es seien r Kreise

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_r$$

im R , bei denen alle Kugeln durch den \mathfrak{K}_1 gleichen Winkel mit dem andern bilden.

Ist

$$\eta = \rho_a \xi^a$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{K} mit

$$\eta \eta = \rho_a \rho_b A^{ab} = 1,$$

so müssen auch

$$\cos^2 \varphi_1 = \rho_a \rho_b T_1^{ab}$$

$$\cos^2 \varphi_2 = \rho_a \rho_b T_2^{ab}$$

$$\cos \varphi_i = \rho_a \rho_b T_i^{ab}$$

unabhängig von ρ_a sein, wobei φ_i der Winkel zwischen η und \mathfrak{R}_i ist.

Das ist möglich für

$$T_i^{ab} \text{ prop. } A^{ab}$$

und

$$T_i^{ab} \text{ prop. } T_k^{ab}, \quad (k=2, \dots, r).$$

Es folgen⁽¹⁾ also

$$A^{ab} D^a D^b; \quad A_k^{ab} D_k^a D_k^b = \text{const.}$$

(8) Ist die ∞^1 Schar von Raumkurven durch die Gleichungen gegeben :

$$\xi^I = \xi^I(t, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\xi^{III} = \xi^{III}(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\omega_\nu(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, (n-1)),$$

so haben unendlich benachbarte Systemkurven nur dann einen Punkt gemein, wenn die $3+(n-1)$ Gleichungen zusammen bestehen :

$$\frac{\partial \xi^I}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^I}{\partial a_i} da_i = 0, \quad \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^{II}}{\partial a_i} da_i = 0, \quad \frac{\partial \xi^{III}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^{III}}{\partial a_i} da_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_\nu}{\partial a_i} da_i = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, (n-1)),$$

also die in der Matrix

(1) Vergl. NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (I), Tôhoku Math. Journ. Vol. 31, 8.25.

Punktbestimmung auf der einzelnen Kreisfläche (α) sind, so führt eine Erwägung gleicher Art wie früher zu dem Ergebnis: der Ort von Schnittlinien unendlich benachbarter Flächen der Schar, d. h. die Enveloppe, ist durch die Gleichungen

$$\xi^I = \xi^I(t, \tau, \alpha), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, \alpha), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, \alpha)$$

definiert, wenn nur α als die durch die Gleichung

$$F(t, \tau, \alpha) \equiv \frac{\partial(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})}{\partial(t, \tau, \alpha)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^I}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial t} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial \tau} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \tau} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = 0$$

bestimmte Funktion von t und τ betrachtet wird.

Nun soll wieder die Identität der Tangentenebenen in den gemeinsamen Punkten der Fläche (α) und der Enveloppe erwiesen werden, welche keine singulären Punkte der ersten Fläche sind, wo also die drei Funktionaldeterminanten aus je zweien der Funktionen $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$ nach t und τ nicht alle verschwinden, und ferner soll auch der Ort der Schnittpunkte aufeinanderfolgender Charakteristiken der Einfüllenden betrachtet werden, d. h. der Ort von Schnittpunkten aufeinanderfolgender Schnittlinien unendlich benachbarter Flächen (α), ($\alpha + d\alpha$), ($\alpha + 2d\alpha + d^2\alpha$)... d. i. die sogenannte Rückkehrkurve.

Geht man von drei Kreisflächen (α), ($\alpha + d_1\alpha$), ($\alpha + d_2\alpha$) aus, so gelten für die Koordinaten der ihnen gemeinsamen Punkte die Gleichungen

$$\xi^I = \xi^I(t, \tau, \alpha) \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, \alpha) \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, \alpha)$$

$$\xi^I(t + d_1t, \tau + d_1\tau, \alpha + d_1\alpha) - \xi^I(t, \tau, \alpha) = 0, \dots$$

$$\xi^I(t + d_2t, \tau + d_2\tau, \alpha + d_2\alpha) - \xi^I(t + d_1t, \tau + d_1\tau, \alpha + d_1\alpha) = 0, \dots$$

und wenn man die drei Kreisflächen unendlich benachbart wählt, so ergeben sich bei dem Grenzübergang aus den zweiten drei Gleichungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \chi^I}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi^I}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \chi^I}{\partial a} da &= 0, \\ -\frac{\partial \chi^{II}}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi^{II}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \chi^{II}}{\partial a} da &= 0, \\ -\frac{\partial \chi^{III}}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi^{III}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \chi^{III}}{\partial a} da &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es muss

$$F(t, \tau, a) = 0$$

sein.—und um die Beziehungen zu erkennen, welche bei dem Grenzübergang aus den letzten drei unserer Gleichungen entspringen, beachte man, dass

$$\begin{aligned} \lim[\chi^I(t + \Delta_1 t, \tau + \Delta_2 \tau, a + \Delta_3 a) - \chi^I(t + \Delta_1 t, \tau + \Delta_1 \tau, a + \Delta_1 a)] = \\ = \lim \left[\left(\frac{\partial \chi^I}{\partial t} \right)_{\theta_2} \Delta_1 t + \left(\frac{\partial \chi^I}{\partial \tau} \right)_{\theta_2} \Delta_2 \tau + \left(\frac{\partial \chi^I}{\partial a} \right)_{\theta_2} \Delta_3 a - \left(\frac{\partial \chi^I}{\partial t} \right)_{\theta_1} \Delta_1 t - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \chi^I}{\partial \tau} \right)_{\theta_1} - \left(\frac{\partial \chi^I}{\partial a} \right)_{\theta_1} \Delta_1 a \right] \\ (0 < \theta_2 < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1) \end{aligned}$$

ist, führe mittlere Grössen Δt , $\Delta \tau$, Δa aus $\Delta_1 t$ und $\Delta_1 \tau$ und $\Delta_1 \tau$, $\Delta_2 a$ und $\Delta_1 a$ und setze den letzten Ausdruck in die Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial \chi^I}{\partial t^2} \Delta t^2 + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial t \partial \tau} \Delta t \Delta \tau + \frac{\partial \chi^I}{\partial \tau^2} \Delta \tau^2 + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial t \partial a} \Delta t \Delta a + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial \tau \partial a} \Delta \tau \Delta a + \right. \\ \left. + \frac{\partial \chi^I}{\partial a^2} \Delta a^2 \right\} + \eta, \end{aligned}$$

wo η ein aus Δt , $\Delta \tau$, Δa zusammengesetzter Ausdruck von höherer Ordnung als der zweiten ist, dann ist ersichtlich, dass die drei Gleichungen bestehen müssen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \chi^I}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial t \partial \tau} dt d\tau + \frac{\partial \chi^I}{\partial \tau^2} d\tau^2 + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial t \partial a} dt da + 2 \frac{\partial \chi^I}{\partial \tau \partial a} d\tau da + \frac{\partial \chi^I}{\partial a^2} da^2 = 0, \\ (A) \quad -\frac{\partial \chi^{II}}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial \chi^{II}}{\partial t \partial \tau} dt d\tau + \frac{\partial \chi^{II}}{\partial \tau^2} d\tau^2 + 2 \frac{\partial \chi^{II}}{\partial t \partial a} dt da + 2 \frac{\partial \chi^{II}}{\partial \tau \partial a} d\tau da + \frac{\partial \chi^{II}}{\partial a^2} da^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial t \partial \tau} dt d\tau + \frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial \tau^2} d\tau^2 + 2 \frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial t \partial a} dt da + 2 \frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial \tau \partial a} d\tau da + \frac{\partial \dot{x}^{\text{III}}}{\partial a^2} da^2 = 0;$$

und jetzt kann man sagen: in jedem Punkte der Rückkehrkurve ist erstens $F(t, \tau, a) = 0$ und muss zweitens die Bedingung erfüllt sein, unter welcher die letzten drei Gleichungen (A) in Rücksicht auf die Relation $F = 0$ verträglich bestehen.

(11) In dem Falle, daß die ∞^1 Kreisflächen die durch die Gleichungen von der Form

$$x^{\text{I}} = x^{\text{I}}(t, \tau, a, \beta), \quad x^{\text{II}} = x^{\text{II}}(t, \tau, a, \beta), \quad x^{\text{III}} = x^{\text{III}}(t, \tau, a, \beta), \quad \omega(a, \beta) = 0$$

gegeben sind, dient zur Bestimmung der Einhüllenden die Gleichung

$$j(t, \tau, a, \beta) = \frac{\partial(x^{\text{I}}, x^{\text{II}}, x^{\text{III}}, \omega)}{\partial(t, \tau, a, \beta)} = 0;$$

und die Rückkehrkurve auf der Enveloppe wird durch eine Relation in t, τ, a, β gekennzeichnet, die durch Nullsetzen einer solchen unter den Determinanten der Matrix

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial x^{\text{I}}}{\partial t} & \frac{\partial x^{\text{II}}}{\partial t} & \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} & \frac{\partial x^{\text{I}}}{\partial \tau} & \frac{\partial x^{\text{II}}}{\partial \tau} & \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial \tau} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial x^{\text{I}}}{\partial a} & \frac{\partial x^{\text{II}}}{\partial a} & \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} & \frac{\partial x^{\text{I}}}{\partial \beta} & \frac{\partial x^{\text{II}}}{\partial \beta} & \frac{\partial x^{\text{III}}}{\partial \beta} & \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \end{array}$$

entsteht, welche die Elemente der ersten und letzten Kolonne enthält, also z. B. durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau, a, \beta) = & \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial(x^{\text{II}}, x^{\text{III}}, \omega)}{\partial(\tau a \beta)} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial(x^{\text{I}}, x^{\text{III}}, \omega)}{\partial(a \beta t)} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial(x^{\text{I}}, x^{\text{II}}, \omega)}{\partial(\beta t \tau)} - \\ & - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial(x^{\text{I}}, x^{\text{II}}, \omega)}{\partial(t \tau a)} = 0, \end{aligned}$$

von der man selbstverständlich zu der Gleichung $\Phi(t, \tau, a) = 0$ zurückgeht,

indem

$$\omega(a, \beta) = \beta - a = 0$$

ist.

(12) Die Ausdehnung der Rechnungsregel auf den Fall, wo die ∞^1 Schar von Kreisflächen Gleichungen mit n Parametern

$$\begin{aligned} \xi^I &= \xi^I(t, \tau, a_1, \dots, a_n), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a_1, \dots, a_n), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, a_1, \dots, a_n) \\ \omega_\nu(a_1, \dots, a_n) &= 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, (n-1)) \end{aligned}$$

gegeben sind, bedarf kaum einer Erwähnung; doch sei noch folgende Bemerkung gestattet:

Die Bestimmung der Enveloppe von ∞^1 Kreisflächen

$$(a) \quad \xi^I = \xi^I(t, \tau, a, \beta), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a, \beta), \quad \xi^{III} = \xi^{III} = \xi^{III} \xi^{III}(t, \tau, a, \beta),$$

$$\omega(a, \beta) = 0$$

ist zu deuten als Ermittlung eines allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi\left(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, \frac{\rho \xi^{III}}{\partial \xi^I}, \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \xi^{II}}\right) = 0$$

aus dem vollständigen Integral

$$(b) \quad \xi^I = \xi^I(t, \tau, a, \beta), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau, a, \beta), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(t, \tau, a, \beta).$$

Die Gesamtheit der allgemeinen Integralflächen umfasse die Punkte der singulären Integralfläche, d. h. der Umhüllungsfläche der ∞^2 Flächen (b).

Darnach ist an den Stellen, wo die Einhüllende von ∞^1 Flächen (a) die Umhüllungsfläche der ∞^2 Flächen (b) berührt, gewiss $f(t, \tau, a, \beta) = 0$ ausserdem aber ist

$$\frac{\partial(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})}{\partial(t, \tau, a)} = 0.$$

Dieselbe Berührungskurve ist auch durch die Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})}{\partial(t, \tau, \beta)} = 0$$

oder durch

$$\frac{\partial(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})}{\partial(t, \tau, \alpha)} = 0, \quad \frac{\partial(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})}{\partial(t, \tau, \beta)} = 0$$

charakterisiert, was stets auf dasselbe hinauskommt.

(13) Ist eine doppelt unendliche Kreisflächenschar durch eine Gleichung

$$f(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, t, \tau) = 0$$

gegeben, so hat die durch

$$\xi^I = f_1(t, \tau), \quad \xi^{II} = f_2(t, \tau), \quad \xi^{III} = f_3(t, \tau)$$

dargestellte Kreisfläche mit jeder Einzelfläche der Schar einen Punkt gemein, wenn die Gleichung

$$f(f_1, f_2, f_3, t, \tau) = 0$$

für jedes Wertepaar t, τ erfüllt ist, woraus sich

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi^I} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\}_{\substack{\xi^I = f_1 \\ \xi^{II} = f_2 \\ \xi^{III} = f_3}} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi^I} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}} \frac{\partial f_2}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial f_3}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \right\}_{\substack{\xi^I = f_1 \\ \xi^{II} = f_2 \\ \xi^{III} = f_3}} = 0$$

ergibt.

Dies zeigt unmittelbar, dass unsere Kreisfläche im Punkte (t, τ) von der diesem Wertepaar entsprechenden Einzelfläche der Schar berührt wird, falls

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\xi^I = f_1, \xi^{II} = f_2, \xi^{III} = f_3} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\xi^I = f_1, \xi^{II} = f_2, \xi^{III} = f_3} = 0,$$

während die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi^I}, \frac{\partial f}{\partial \xi^{II}}, \frac{\partial f}{\partial \xi^{III}}$ für $\xi^I = f_1, \xi^{II} = f_2, \xi^{III} = f_3$

nicht zugleich verschwinden.

Wir erhalten so den bekannten Satz:

Lassen sich aus den Gleichungen

$$f(\xi^I, \xi^II, \xi^III, t, \tau) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$$

die Zahlen ξ^I, ξ^II, ξ^III als Funktionen von t und τ derart bestimmen, dass die Lösungsfunktionen

$$\xi^I = f_1(t, \tau), \quad \xi^II = f_2(t, \tau), \quad \xi^III = f_3(t, \tau)$$

eine reelle Kreisfläche festsetzen, so ist die letztere eine berührende Kreisfläche für die gegebene Kreisflächenschar, wenn Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi^I}, \frac{\partial f}{\partial \xi^II}, \frac{\partial f}{\partial \xi^III}$ für $\xi^I = f_1, \xi^II = f_2, \xi^III = f_3$ nicht zugleich verschwinden.

(14) Besitzt die durch $F(\xi^I, \xi^II, \xi^III, a) = 0$ dargestellte Kreisflächenschar eine Berührende, so lassen sich zwei der Koordinaten ξ^I, ξ^II, ξ^III durch die dritte und den Parameter a mit Hilfe der Gleichungen $F = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0$ ausdrücken, so dass etwa

$$\xi^II = F_1(\xi^I, a), \quad \xi^III = F_2(\xi^I, a)$$

sind.

Hierdurch ist eine Kurvenschar $a = \text{const.}$ bestimmt, die auf der Berührenden liegt und von G. MONGE (Application d'Analyse à la Géométrie. § 6) die Schar Charakteristiken der Kreisflächenschar $a = \text{const.}$ genannt wurde.

Wir zeigen, dass die Charakteristiken eine Berührende besitzen, falls die Auflösung der Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0$$

auf eine reelle Kurve führt, längs derer die drei Determinanten

$$D_1 = \frac{\partial F}{\partial \xi^II} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^III \partial a} - \frac{\partial F}{\partial \xi^III} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^II \partial a},$$

$$D_2 = \frac{\partial F}{\partial \xi^III} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^I \partial a} - \frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^III \partial a},$$

$$D_3 = -\frac{\partial F}{\partial \xi^I} - \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha}.$$

nicht verschwinden.

Zu diesem Zweck stellen wir die Schar der Charakteristiken durch die Gleichungen

$$\xi^I = f_1(\beta, \alpha), \quad \xi^{II} = f_2(\beta, \alpha), \quad \xi^{III} = f_3(\beta, \alpha)$$

dar und nehmen an, dass die Kurvenschar $\beta = \text{const.}$ zu der Kurvenschar $\alpha = \text{const.}$ senkrecht sei.

Die beiden Gleichungen $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$ ergeben, wenn man sie nach β und α differenziert:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial \xi^I}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II}} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \beta} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} \frac{\partial \xi^I}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \beta} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II}} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die drei Determinanten D_1, D_2, D_3 können unter den gemachten Voraussetzungen nicht für jedes Wertsystem β, α gleichzeitig verschwinden, denn wenn man

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^I \partial \alpha} = x \frac{\partial F}{\partial \xi^I}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} = x \frac{\partial F}{\partial \xi^{II}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi^{III} \partial \alpha} = x \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}}$$

hätte, so würde aus der letzten Gleichung (1) folgen, dass auch $\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}$ für jedes Wertsystem β, α verschwinden müsste. Man erhält daher

$$\frac{\partial \xi^I}{\partial \beta} : \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \beta} : \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \beta} = D_1 : D_2 : D_3$$

und ist sicher, dass D_1, D_2, D_3 nur längs einer Kurve zugleich verschwinden können. Da

$$\sum \frac{\partial \xi^I}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} = 0,$$

so ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^I} - \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II}} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} = 0,$$

$$D_1 \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} + D_2 \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} + D_3 \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} - \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi^{III} \partial \alpha} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} = - \frac{\partial F}{\partial \alpha},$$

d. h.,

$$(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi^I} \sum \frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^I} \right)^2 \right\},$$

$$(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi^{II}} \sum \frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \xi^{II} \partial \alpha} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^I} \right)^2 \right\},$$

$$(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi^{III}} \sum \frac{\partial F}{\partial \xi^I} \frac{\partial F}{\partial \xi^I \partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \xi^{III} \partial \alpha} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^I} \right)^2 \right\}.$$

Wenn nun $\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}$ langs einer solchen Kurve auf der berührenden Fläche verschwindet, langs derer D_1, D_2, D_3 nicht zugleich verschwinden, so werden langs dieser Kurve $\frac{\partial \xi^I}{\partial \alpha}, \frac{\partial \xi^{II}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \xi^{III}}{\partial \alpha}$ gleichzeitig zu Null; also ist diese Kurve eine Berührende der Charakteristikenschar $\alpha = \text{const.}$ (Vgl. L. RAFFY, Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Paris 1897. S. 57.)

(15) Hier verstehen wir auch unter p das Produkt und unter s die Summe der Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 einer Eifläche E .

H sei die Stützfunktion von E .

Dann fragen wir

(a) Für welche Eiflächen

$$(1) \quad p = asH + b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a, b \text{ konstant.}$$

ist?

Wir benutzen die Gleichungen der MINKOWSKISCHEN Theorie von Volumen und Oberfläche :

$$(2) \quad \begin{cases} O = \int p d\omega = \frac{1}{2} \int s H d\omega, \\ M = \int H d\omega = \frac{1}{2} \int s d\omega, \end{cases}$$

wobei die Integration über die ganze Einheitskugel zu erstrecken ist.

Nach (1) und (2) ist

$$(3) \quad O = \frac{4\pi\beta}{1-2a}$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist ferner

$$O^2 \leq M \int -\frac{sH'}{2} d\omega.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 3v &= \int p H d\omega = a \int s H' d\omega + bM \\ &\geq -\frac{2aO'}{M} + bM, \end{aligned}$$

also nach (3)

$$O^2 = \frac{16\pi^2 b'}{(1-2a)^2} \geq 3vM \geq 2aO' + bM'.$$

Hier habe ich benutzt die erste der folgenden Minkowskischen Ungleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} O &\geq 3vM, \\ M &\geq 4\pi O, \\ O' &\geq 36\pi v', \\ M' &\geq 48\pi v, \end{aligned}$$

in deren letzten drei das Gleichheitszeichen für die Kugeln charakteristisch ist.

Es ist also

$$(5a) \quad 16\pi^{\circ}b \geq (1-2a)M'.$$

Andererseits ist nach (3) und (4)

$$(5b) \quad M' \geq 4\pi O = \frac{16\pi^{\circ}b}{1-2a},$$

sodass nach (5a) in (5b), d. h. in (4)₂ das Gleichheitszeichen gültig ist.

E ist somit eine Kugel.

(b) Für welche Eiflächen alle Orthogonalprojektionen gleichen Umfang und gleichen Flächeninhalt haben?

Wir behaupten,⁽¹⁾ das sei nur für die Kugeln der Fall.

Nach MINKOWSKI sind die Eiflächen konstanten Umfangs auch von konstanter Breite D

$$(1') \quad H + \bar{H} = D.$$

(Mit Überstreichen bezeichne ich die Grössen in den Gegenpunkten)
Für diese Flächen ist ausserdem bekanntlich

$$(2) \quad s + \bar{s} = 2D.$$

Ferner ist nach Herglotz für die Eiflächen „konstanter *Helligkeit*“ (vergl. W. BLASCHKE, Kreis und Kugel), d. h. der Projektionen gleicher Flächeninhalte,

$$(3') \quad p + \bar{p} = k' = \text{konst.}$$

Es folgt also nach (2)

$$(4') \quad \begin{aligned} M &= 2\pi D, \\ O &= 2\pi k', \end{aligned}$$

und nach (4)

$$M' = 4\pi^{\circ}D' \geq 4\pi O = 8\pi^{\circ}k',$$

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über charakteristische Eigenschaften der Kugel, die jetzt in der Presse in Tohoku Math. Journ. ist.

also

$$(5') \quad D \geq k\sqrt{2}.$$

Hierin gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn es in (4) gilt, also nur für Kugeln.

Es seien nun

$$r, \quad \bar{r}$$

die Krümmungsradien der ebenen Projektionskurven; dann ist nach (1')

$$(6') \quad r + \bar{r} = D.$$

Nach W. BLASCHKE (Kreis und Kugel, S. 108 (II)) ist

$$(7') \quad \begin{cases} r = R_1 \cos' \alpha + R_2 \sin \alpha \\ \bar{r} = R_1 \cos' \alpha + R_2 \sin'' \alpha. \end{cases}$$

Nun besitzt eine Eifache mindestens einen Nabelpunkt $N(R_1 = R_2)$, dort ist also

$$(8') \quad \begin{aligned} r &= R_1 = R_2 = R, \\ \bar{r} &= D - R. \end{aligned}$$

Von N geht eine Sehne S von der Länge D aus.

Betrachten Wir nun alle Projektionen senkrecht zur Richtung von S, so gilt für diese alle die Gleichung (8').

Dann aber folgt aus (7), dass auch

$$(9') \quad \bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \bar{R} = r$$

sein muss; Der Gegenpunkt N eines Nabelpunktes N ist also wieder Nabelpunkt.

Dann aber ist nach (3)

$$R' + \bar{R}' = k \geq 2R\bar{R}.$$

Andererseits ist nach (5'), (8'), (9')

$$\begin{aligned} R' + \bar{R}' + 2R\bar{R} \\ = D' \\ = k' + 2R\bar{R} \end{aligned}$$

$$\geq 2k',$$

sodass also

$$2R\bar{R}=k' \text{ ist}$$

und somit in (5') das Gleichheitszeichen folgt, w. z. b. w..

(c) Man überzeugt sich analog leicht davon, dass unter Verwendung der früheren Bezeichnungen die Kugeln die einzigen Eiflächen sind, für die die Relationen bestehen :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + \bar{R}_1 = a = \text{konst.} \\ R_2 + \bar{R}_2 = b = \text{konst.}, \\ R \geq R_1, \\ \bar{R}_1 \geq \bar{R}_2. \end{array} \right.$$

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (IV)

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, January 20th, 1933)

(1) Den Kennzeichen der Kugel, die ich vor mehreren Jahren und vor kurzem gefunden habe, will ich hier einige weitere folgen lassen.

Wir betrachten zunächst ein Kennzeichen der Kugel.

Im 40. Band des Jahresberichts der D. M. V. (1931) hat W. Süssz das folgende zu Erweiterung anregende Kennzeichen des Kreises bewiesen :

„Für jeden Punkt P eines ebenen Eibereichs E sei $s(P)$ das Minimum der Längen aller P enthaltenden Sehnen von E .

Dann sind Kreise die einzigen Eibereiche, welche höchstens in einem Punkt mehr als eine Sehne kleinster Länge s besitzen.“

Mit denselben Hilfsmitteln will ich hier die folgende charakteristische Eigenschaft der Kugel beweisen :

Für jeden Punkt P eines räumlichen Eibereichs E sei das Minimum der Flächeninhalte aller P enthaltenden Schnittovale von E .

Dann sind Kugeln die einzigen Eibereiche, welche höchstens in einem Punkt eines Durchmessers mehr als einen Schnitt kleinster Fläche f besitzen.

Die Voraussetzungen dieses räumlichen Satzes gehen also über die analogen des ebenen Satzes insofern hinaus, als der Ausnahmepunkt O auf einem Durchmesser (Sehne maximaler Länge) von E liegen soll.

Ob der Satz ohne diese zusätzliche Voraussetzung auch richtig ist, bleibt hier eine offene Frage.

Zum Beweise folgen wir zunächst dem Gedankengang der Arbeit von Süss.

$f(P)$ ist eine stetige Funktion des Ortes in E .

Sie nehme in R ihr Maximum an :

$$f(R) \geq f(P)$$

Wir zeigen zunächst, dass R gerade der Ausnahmepunkt O ist, indem alle Schnitte durch R denselben Flächeninhalt besitzen.

Nach dem bekannten Satz von BRUNN über die Parallelschnitte eines Eibereichs nimmt f auf jeder Verbindungsstrecke von R mit dem Rand von E monoton ab.

Dann betrachten wir für jedes g zwischen O und $f(R)$ die Menge $M(g)$ der auf dem Strahlenbündel (R) R nächstgelegenen Punkte g , für die

$$f(G) = g$$

ist.

$M(g)$ ist eine stetige geschlossene sog. Sternfläche, die R im Innern enthält.

Variiert g von O bis $f(R)$, so erhält man eine Schar E solcher ausfüllenden, ineinander geschachtelten Sternflächen.

Jede $M(g)$ ist nun konvex.

Denn nach ihrer Konstruktion sind in jedem ihrer Punkte g die Ebenen von $f(G)$ Stützebenen an

Umgekehrt ist leicht zu zeigen, dass alle Stützebenen von Schnitten gleichen kleinsten Inhalts

$$f = g$$

aus E ausschneiden.

Deshalb besitzen alle $M(g)$ abgesehen von dem Ausnahmepunkt O in jedem Punkt nach der Voraussetzung nur eine Stützebene.

Da sich nun die $M(g)$ auf R zusammenziehen, so müssen auch alle Schnitte durch R gleichen Flächeninhalt haben.

Damit ist zunächst die Existenz eines Ausnahmepunktes bewiesen, ferner aber auch

$$O=R.$$

Nun können wir den folgenden Satz von T. KUBOTA anwenden :
E seien

$$r_1, r_2$$

stets zwei entgegengesetzt gerichtete Radienvektoren von einem Innenpunkt O eines Eibereichs E aus.

Wenn dann alle Schnitte von E durch O (wie oben bewiesen) gleichen Flächeninhalt haben, so ist in allen Richtungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & r_1^2 + r_2^2 \\ & = 2r^2 \\ & = \frac{2f(0)}{\pi} \\ & = \text{const.} \end{aligned}$$

Nun soll O auf einem Durchmesser D von E liegen, also soll

$$\begin{aligned} (2) \quad & D = \text{Max } (r_1 + r_2) \\ & = 2r \end{aligned}$$

sein.

Nach L. BIEBERBACH besteht nun zwischen dem Durchmesser d eines ebenen Eibereichs e und dessen Inhalt i die Relation

$$(3) \quad \frac{\pi d^2}{4} \geq i$$

und hierin ist das Gleichheitszeichen nur für Kreise gültig.

Verstehen wir unter e einen Schnittbereich von E durch O, so ist

$$i = f(0)$$

und es folgt aus (1) und (2), dass in (3) das Gleichheitszeichen gilt.

Alle Schnitte durch O sind also gleichgroße Kreise !

Ausserdem ist dann⁽¹⁾

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über knovex-geschlossene Fläche, Tôhoku Month. Journ. Vol. 36 (1933). p. 194.

$$\begin{aligned}\frac{D}{2} &= r \\ &= r_1 \\ &= r_2 ;\end{aligned}$$

also liegen die Mittelpunkte O, w. z. b. w.

(2) Hier mögen wir einige Bemerkungen über Differentialgeometrie der Kreisscharen angeben.

Ist $F(t, \tau)$ eine Minimallinie, so soll jeder Punkt der Kurve senkrecht zu dem Bogenelemente der Kurve um die konstanten unendlich kleinen Grössen δs verschoben werden.

Für die Zuwachse δt und $\delta \tau$ von t und τ erhält man daher die Gleichungen :

$$\begin{aligned}(\theta_t \theta_t) \delta t^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) \delta t \delta \tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \delta \tau^2 &= \delta s^2 \\ (\theta_t \theta_t) \delta t \, dt + (\theta_t \theta_\tau) (dt \delta \tau + d\tau \delta t) + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau \delta \tau &= 0,\end{aligned}$$

oder wenn man setzt

$$dF = p \, dt + q \, d\tau = 0,$$

die Werte :

$$\begin{aligned}\delta t &= \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) p - (\theta_t \theta_\tau) q}{\sqrt{\{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2\} \{(\theta_t \theta_t) q' - 2(\theta_t \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2\}}} \lambda \delta s \\ \delta \tau &= \frac{(\theta_t \theta_t) q - (\theta_t \theta_\tau) p}{\sqrt{\{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2\} \{(\theta_t \theta_t) q' - 2(\theta_t \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2\}}} \lambda \delta s.\end{aligned}$$

Bei Anwendung der Bezeichnung

$$H = \sqrt{\frac{(\theta_t \theta_t) q' - 2(\theta_t \theta_\tau) p q + (\theta_\tau \theta_\tau) p^2}{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}}$$

ist daher

$$\delta t = \frac{\partial H}{\partial p} \delta s, \quad \delta \tau = \frac{\partial H}{\partial q} \delta s.$$

Die Zuwachse von p und q sind jetzt so zu bestimmen, dass

$$\delta(pdt + qd\tau) = 0$$

wird, dann gehen je zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Linienelemente: t, τ, p, q und $t+dt, \dots, q+dq$ der Kurve in zwei ebensolche Linienelemente über und also die ganze Kurve als Linienelementgebilde betrachtet wieder in eine Kurve.

Hieraus ergibt sich:

$$pdt + \delta q d\tau + \left(p d \frac{\partial H}{\partial p} + q d \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta T = 0$$

oder wegen der Homogeneität von H

$$\delta p = - \frac{\partial H}{\partial t} \delta T, \quad \delta q = - \frac{\partial H}{\partial \tau} \delta T.$$

Unsre infinitesimale Paralleltransformation erscheint daher als eine homogene Berührungstransformation im Sinne LIES und ihre charakteristische Funktion ist die Grösse H, also die Wurzel aus dem zur Form

$$dT^2 = (\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2$$

gehörigen BEITRAMISCHEN Differentialparameter erster Ordnung. Nun suchen wir an einer Stelle den Grösstwert von $(d\varphi : dT)^2$, wenn wir dT um den Punkt drehen, wobei $\varphi(t, \tau)$ einer Funktion auf unserer Kreisfläche ist.

Es soll also

$$\left(\frac{d\varphi}{dT} \right)^2 = (\varphi_t t' + \varphi_\tau \tau')^2 = \text{Maximum}$$

werden unter der Nebenbedingung

$$\Phi = (\theta, \theta_t) t'^2 + 2(\theta, \theta_\tau) t' \tau' + (\theta_\tau, \theta_\tau) \tau'^2 = 1.$$

Nach der bekannten Multiplikatorregel von EULER und LAGRANGE bildet man

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{d\varphi}{dT} \right)^2 - \lambda \Phi$$

und sucht die freien Extreme von \mathcal{Q} .

Die Gleichungen $\delta \mathcal{Q} : \delta t' = 0, \delta \mathcal{Q} : \delta \tau' = 0$ gebe

$$(1) \quad \begin{aligned} (\varphi_t t' + \varphi_\tau \tau') \varphi_t - \lambda((\theta_t \theta_t) t' + (\theta_\tau \theta_\tau) \tau') &= 0, \\ (\varphi_t t' + \varphi_\tau \tau') \varphi_\tau - \lambda((\theta_t \theta_t) t' + (\theta_\tau \theta_\tau) \tau') &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Formeln mit t' , τ' und addiert, so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Gamma} \right)^2 = \lambda.$$

Entfernt man andererseits t', τ' aus den beiden Gleichungen, (1) so folgt

$$\lambda[(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - \theta_t \theta_\tau]^2 = (\theta_t \theta_t) \varphi_t^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \varphi_t \varphi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \varphi_\tau^2.$$

Somit ist

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Gamma} \right)_{\text{Maximum}} = \frac{(\theta_t \theta_t) \varphi_t^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \varphi_t \varphi_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) \varphi_\tau^2}{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}.$$

Wenn

$$P dt' + 2Q dt d\tau + R d\tau^2 = 0$$

Affinkrümmungslinien auf einer Kreisfläche sind, dann folgt

$$(\theta_t \theta_t) R - 2(\theta_t \theta_\tau) Q + (\theta_\tau \theta_\tau) P = 0.$$

(3) Die Gleichung

$$(1) \quad f(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = 0,$$

oder

$$(2) \quad \xi^{III} = q(\xi^I, \xi^{II}),$$

wo die Funktion $f(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = 0$ für einen gewissen Wertbereich der Veränderlichen ξ^I und ξ^{II} eindeutig definiert sein musz, bedeutet geometrisch ein Paar von Kurven im R_3 , wobei ξ^I und ξ^{II} zwei Kugeln im R_2 sind.

Ein Hauptmittel zur Untersuchung dieser Kurve in der Betrachtung von Kurven, die in der Kreisfläche liegen, von sogenannten Kreisflächenkurven.

Um eine solche darzustellen, denken wir uns ξ^I und ξ^{II} als Funktionen von t und erhalten aus (2) als Gleichungen einer Kreisflächenkurve:

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi^I &= \xi^I(t), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t), \\ \xi^{III} &= g(\xi^I(t), \xi^{II}(t)). \end{aligned}$$

Nun haben wir bei der Untersuchung von Kurven in der Differentialgeometrie stets vorausgesetzt, dass im allgemeinen die einem Zuwachs Δt von t entsprechenden Zuwächse $\Delta \xi^I$, $\Delta \xi^{II}$, $\Delta \xi^{III}$ der Koordinaten eines Kurvenpunktes nach ganzen positiven Potenzen von Δt entwickelbar seien.

Lassen wir nur solche Funktionen $\xi^I(t)$, $\xi^{II}(t)$ zu, bei denen diese Voraussetzung in bezug auf $\Delta \xi^I$ und $\Delta \xi^{II}$ erfüllt ist, so wird sie dann und nur dann auch erfüllt sein, wenn der Ausdruck

$$g\{(\xi^I)_0 + \Delta \xi^I, (\xi^{II})_0 + \Delta \xi^{II}\},$$

falls $(\xi^I)_0$, $(\xi^{II})_0$ ein zulässiges Wertepaar von ξ^I , ξ^{II} darstellt, im allgemeinen nach ganzen positiven Potenzen von $\Delta \xi^I$ und $\Delta \xi^{II}$ entwickelbar ist.

$$(4) \quad \varphi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = \text{const.}$$

bedeutet eine Schar von einem Paar der Kurven.

Aus (4) folgt

$$(5) \quad d\varphi \equiv \varphi_{\xi^I} d\xi^I + \varphi_{\xi^{II}} d\xi^{II} + \varphi_{\xi^{III}} d\xi^{III} = 0.$$

(4) Es seien zwei Kreise \mathfrak{K} , $\bar{\mathfrak{K}}$ im R_3 gegeben.

Ist $\eta = \rho_a \xi^a$ eine normierte Kugel im R_3 durch \mathfrak{K} , so setzen wir

$$(1) \quad \eta \bar{\eta} = \rho_a \rho_b A^{ab} = 1$$

ein.

Dann muss sein

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{ab} \rho_a \rho_b,$$

wobei φ den Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{K}}$ bedeutet,

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2}.$$

Aus

$$\frac{d\varphi}{d\rho_1} = 0$$

folgt

$$(4) \quad \frac{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2} = \frac{T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2}{A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2}.$$

Weiter ergibt sich aus

$$\frac{d\varphi}{d\rho_2} = 0$$

$$(5) \quad \frac{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2} = \frac{T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2}{A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2}.$$

Aus (4), (5) folgt

$$(6) \quad \frac{T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2}{A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2} = \frac{T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2}{A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2}.$$

Also folgt der

Satz. Für Minimum-oder Maximumwerte von φ besteht

$$\cos^2 \varphi = \frac{T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2}{A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2} = \frac{T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2}{A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2}.$$

(5) Sind $\bar{\rho}_1 : \bar{\rho}_2$ und $\bar{\bar{\rho}}_1 : \bar{\bar{\rho}}_2$ die beiden Wurzeln von

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \rho_1^2 T^{11} + 2\rho_1 \rho_2 T^{12} + \rho_2^2 T^{22} = 0,$$

so sind

$$(2) \quad \bar{r} = \bar{\rho}_1 \bar{x}^I + \bar{\rho}_2 \bar{x}^{II},$$

$$(3) \quad \bar{\bar{r}} = \bar{\bar{\rho}}_1 \bar{\bar{x}}^I + \bar{\bar{\rho}}_2 \bar{\bar{x}}^{II},$$

(1) genügt und für $\cos^2 \varphi$ gilt

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = p(\rho_1 \bar{\rho}_2 - \rho_2 \bar{\rho}_1)(\rho_1 \bar{\bar{\rho}}_2 - \rho_2 \bar{\bar{\rho}}_1)$$

was mit (4) verglichen

$$(5) \quad T^{11} = p \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2, \quad T^{12} = -\frac{p}{2} (\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_1), \quad T^{22} = p \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_1$$

gibt.

Wir können demnach $\cos^2 \angle \hat{g}^{I\hat{g}II}$ schreiben in der Form:

$$(6) \quad \cos^2 \angle \hat{g}^{I\hat{g}II} = \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}_1^2 \bar{\rho}_2^2 + 2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1^2 \bar{\rho}_2^2}{\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_1} \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} : \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} + \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} : \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} \right) + \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\angle \hat{g}^{I\hat{g}II} = \Phi$, so gilt aber auch

$$(7) \quad \cos^2 \Phi = \frac{(e^{i\Phi} + e^{-i\Phi})^2}{4} = \frac{1}{4} [e^{2i\Phi} + e^{-2i\Phi}] + \frac{1}{2},$$

also, wenn wir

$$(8) \quad \frac{\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}}{\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}} = \omega$$

setzen, so entsteht

$$(9) \quad e^{2i\Phi} + e^{-2i\Phi} = \omega + \omega^{-1}.$$

Durch Multiplikation mit $e^{2i\Phi}$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für $e^{2i\Phi}$, deren Wurzeln

$$(10) \quad e^{2i\Phi} = \omega, \quad e^{-2i\Phi} = \omega^{-1}$$

man aus (9) ableitet.

Wir erhalten somit $2i\Phi = \pm \ln \omega$, also

$$(11) \quad \varphi = \pm \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\bar{\rho}_1}{\rho_2} : \frac{\bar{\rho}_1}{\rho_2} \right).$$

Wir berechnen das Doppelverhältnis

$$(12) \quad (\bar{I} \bar{I} \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi})$$

der vier Vektoren \bar{I} , \bar{I} , \hat{x}^I und \hat{x}^{Π} .

Die Darstellung von (12) ist

$$(\bar{I} \bar{I} \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi}) = \frac{-\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \cdot \frac{\bar{\rho}_1}{-\bar{\rho}_2} = \frac{\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}}{\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}} = \omega^{-1},$$

und somit erhalten wir statt (11)

$$\angle \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi} = \varphi = \pm \frac{i}{2} \ln (\bar{I} \bar{I} \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi}).$$

Kommen wir nun damit überein, welchen der beiden isotropen Vektoren wir mit \bar{I} als erstem bezeichnen, so ist durch

$$\angle \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi} = + \frac{i}{2} \ln (\bar{I} \bar{I} \hat{x}^I \hat{x}^{\Pi})$$

über den Richtungssinn des Winkels entschieden.

Betrachten wir eine Kugelkongruenz⁽¹⁾

$$(13) \quad \begin{cases} \eta = \eta(u^1, u^2) \\ (\eta\eta) = 1 \end{cases},$$

deren beide Enveloppenmäntel

$$(14) \quad \begin{cases} x = x(u^1, u^2) \quad (x\bar{x} = 0) \\ \bar{x} = \bar{x}(u^1, u^2) \quad (\bar{x}\bar{x} = 0) \end{cases} \text{ sind.}$$

(1) Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. II, No. 1 (1929) p. 20.

Man führe die Bezeichnung:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u^i} = \eta_i, \quad \text{u. s. w.}$$

ein.

Die betreffenden Koordinate seien wie folgt normiert:

$$(15) \quad (\xi \bar{\xi}) = 1$$

Legt man die folgenden Bezeichnungen und Formeln zu Grunde:

$$\begin{aligned} (\eta_h \eta_k) du^h du^k &= \mathfrak{G}_{hk} du^h du^k \quad (\text{Grundform der Tensorrechnung}), \\ \mathfrak{G} &= \mathfrak{G}_{11} \mathfrak{G}_{22} - \mathfrak{G}_{12}^2, \quad D_{hk} = -(\eta_h \xi_k) = (\eta \xi_{hk}) = (\xi \eta_{hk}), \\ \bar{D}_{hk} &= -(\eta_h \bar{\xi}_k) = (\eta \bar{\xi}_{hk}) = (\bar{\xi} \eta_{hk}), \\ (16) \quad \mathfrak{G}^{11} &= 0, \quad \mathfrak{G}^{12} = \mathfrak{G}^{-\frac{1}{2}} = -\mathfrak{G}^{-1}, \quad \mathfrak{G}^{22} = 0, \\ \mathfrak{G}^{hk} &= -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{G}_{hk}} \log \mathfrak{G}, \quad N_h = (\xi \bar{\xi}_h) = -(\bar{\xi} \xi_h), \\ D &\equiv D_{11} D_{22} - D_{12}^2, \quad \bar{D} \equiv \bar{D}_{11} \bar{D}_{22} - \bar{D}_{12}^2, \end{aligned}$$

dann entstehen die folgenden Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \eta_{hk} &= -\mathfrak{G}_{hk} \eta + \bar{D}_{hk} \xi + D_{hk} \bar{\xi} \\ \xi_h &= -D_h^* \eta - N_h \xi, \\ \bar{\xi} &= -\bar{D}_h^* \eta + N_h \bar{\xi}. \end{aligned}$$

(6) Eine Schar von $2 \infty^1$ Kurven im gewöhnlichen Raume R_3 kann dargestellt werden in der Form:

$$(1) \quad \xi^{\text{II}} = \xi^{\text{II}}(\xi^{\text{I}}, a_1, a_2, \dots, a_5), \quad \xi^{\text{III}} = \xi^{\text{III}}(\xi^{\text{I}}, a_1, a_2, \dots, a_5),$$

wo die Parameter wesentlich sind.

(I) bezeichnet Kurven auf einer Kreisfläche.

Die einer bestimmten Kurve a unendlich benachbarten und sie schneidenden Kurven sind definiert durch die Gleichungen, die aus

$$(2) \quad \delta \xi^{\text{II}} = \sum_1^5 k \frac{\partial \xi^{\text{II}}}{\partial a_k} da_k = 0, \quad \delta \xi^{\text{III}} = \sum_1^5 k \frac{\partial \xi^{\text{III}}}{\partial a_k} da_k = 0$$

durch Elimination von ξ^{I} hervorgehen.

Liegen ∞^2 Kurven auf einer Kreisfläche, dann bestehen

$$(3) \quad \gamma_i(a_1, a_2, \dots, a_5) = c_i \quad (i=1, 2, 3).$$

Die der Kurve a_1, \dots, a_5 unendlich benachbarten Kurven der auf der Fläche liegenden Schar sind dann definiert durch die drei Gleichungen

$$(4) \quad \sum_1^5 k \frac{\partial \gamma_i}{\partial a_k} da_k = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Da nun auf jede Kugel ξ^{I} der Kurven a_1, \dots, a_5 gerade eine unendlich benachbarte, auf der Fläche liegende Kurve geht, so bestimmen die fünf Gleichungen (2) und (4) zusammen die Verhältnisse der da_k ; sie können demnach nicht linear unabhängig sein.

(7) Wenn $\sin^2 \varphi$ gegeben und ξ^2 gleich ist, dann folgt aus (16) in (1)

$$\begin{aligned} [T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}] \rho_1^2 + 2[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}] \rho_1 \rho_2 + \\ + [T^{22} + (\gamma^2 - 1)A^{22}] \rho_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 : \rho_2 \\ \rho_1 : \rho_2 \end{array} \right\} = \left(\pm \sqrt{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2 - [T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}][T^{22} + (\gamma^2 - 1)A^{22}] - [T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2} : [T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}], \right.$$

Also erhält man

$$(1) \quad D = \frac{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}] - \sqrt{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2 - [T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}][T^{22} + (\gamma^2 - 1)A^{22}] - [T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2}}{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}] + \sqrt{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2 - [T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}][T^{22} + (\gamma^2 - 1)A^{22}] - [T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2}},$$

wobei D das Doppelverhältnis von $\mathfrak{g} = \rho_* \xi^*$ ist.

$$\frac{1}{4} \left(\left(D + \frac{1}{D} \right) + \frac{1}{2} \right) = \frac{[T^{12} + (\gamma^2 - 1)A^{12}]^2}{[T^{11} + (\gamma^2 - 1)A^{11}][T^{22} + (\gamma^2 - 1)A^{22}]}.$$

(8) Wir wollen mit (x, y) , (x', y') zwei Kartesische Koordinaten der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise im R_2 und mit (z, z') die beiden Radien der Kreise bezeichnen und dann mit (ξ, η) , und (ξ', η') zwei Kartesischen Koordinaten der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten, und mit (β, β') beiden Radien zwei anderer Kreispaares bezeichnen.

Dann bezeichnet

$$(1) \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

das Quadrat der Länge zwischen zwei Mittelpunkten der Kreise.

Nun definiere man das System der acht homogenen Größen P und p entsprechend der Proportion

$$p_0 : p_1 : p_2 : \dots : p_7 = 1 : \xi_1 : \eta_1 : \beta_1 : x_1 : y_1 : z_1 : \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \beta_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2),$$

$$q_0 : q_1 : q_2 : \dots : q_7 = 1 : \xi_2 : \eta_2 : \beta_2 : x_2 : y_2 : z_2 : \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \eta_2^2 + \beta_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2),$$

dann sind die 8 homogenen Koordinaten p durch die homogene quadratische Relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 - X_6^2 - 2X_4X_7 - 0$$

$$[X_0 \equiv 1, X_1 \equiv \xi, X_2 \equiv \eta, X_3 \equiv \beta, X_4 \equiv x, X_5 \equiv y,$$

$$X_6 \equiv z, X_7 \equiv \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \beta^2 - x^2 - y^2 - z^2)],$$

miteinander verbunden q , und auch besteht dieselbe Relation.

Bringt man dies durch die Gleichung

$$(\bar{x}\bar{y}) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 - X_4Y_4 - X_5Y_5 - X_6Y_6 - X_7Y_7 - X_7Y_7,$$

$$= -\frac{1}{2} [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2],$$

$$[Y_0 \equiv 1, Y_1 \equiv \xi, Y_2 \equiv \eta, Y_3 \equiv \beta, Y_4 \equiv x, Y_5 \equiv y, Y_6 \equiv z,$$

$$Y_7 \equiv \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \beta^2 - x^2 - y^2 - z^2)],$$

zwischen die \bar{x} und \bar{y} Koordinaten, dann besteht

$$(\bar{x}\bar{y}) = -\frac{1}{2} [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2].$$

Wenn $(\bar{x}\bar{y})=0$, dann besteht

$$(2) \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2.$$

Nach (1) und (2) kann man wissen, dass $(\bar{x} \bar{y})=0$ bedeutet: die Quadrate der Längen zwischen zwei Mittelpunkten der Kreise einander gleich sind.

(9) 1st

$$(1) \quad \Delta=0,$$

dann haben wir die Hyperkurven,⁽¹⁾ deren Hyperkugeln sich konsekutiv berühren.

Aus Muhlbachscher Arbeit⁽²⁾ ergibt sich

$$\Delta=0$$

gleich der

$$(2) \quad \tau = \pm i \frac{\rho}{\rho'}$$

Also ist (2) die Bedingung für das die Hyperkurven, deren Hyperkugeln sich konsekutiv berühren.

(10) Betrachten wir zwei Punktepaare

$$(x^\mu) = \{\xi^I, \xi^{II}\} \text{ und } (\bar{x}^\mu) = \{\bar{\xi}^I, \bar{\xi}^{II}\}, (\mu=1, 2)$$

im R , dann bezeichnen

$$x^\mu = f(x^\mu), \bar{x}^\mu = \phi(\bar{x}^\mu)$$

zwei neue Punktepaare, wobei f, ϕ eindeutige stetige Funktionen sind.

Sind $T^{\mu\nu}$ ein Matrix

- (1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen IV, Tôhoku Math. Journ. 31 (1923) p. 217.
- (2) MUHLBACH, R.: Ueber Raumkurven in der MÖBBIUSschen Geometrie, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang (1923) S. 4.
- (3) ROSE, H. S.: An Absolute partial differential Calculus, Quaterly Journ. of Mathematics, vol. 2 (1931) p. 191.

$$\begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(2)} \\ T^{(1)} & T^{(2)} \end{pmatrix},$$

dann bestehen $T^{\mu(p)'}$ ähnliche Beziehungen, wie in der Ruseschen Arbeit, wobei

- (i) $T^{\mu(p)'}$ 4 Funktionen von (x^μ) und (\bar{x}^μ) ;
- (ii) $T^{\mu(p)'}$ 4 Funktionen von (x^μ) und (\bar{x}^μ) ;
- (iii) $T^{\mu(p)'}$ 4 Funktionen von (x^μ) und (\bar{x}^μ)

sind.

Ueber Flächen und Kurven (III)

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, April 7th, 1933)

(I) Ueber konvex-geschlossene Flaechen

(I)

Hier beweise ich, indem ich die Formeln in BLASCHKES Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band II, insbesondere § 64 benutze, den folgenden Satz :

Die Fläche ist dann und nur dann von konstanter Helligkeit oder die Kugel, wenn die beiden Punkte p und \bar{p} , die Gegenpunkten konstant Abstand haben, wobei $p = \xi + (R_1 R_2) \eta$ ist.

Beweis: $1/R_1 R_2$ sei das Krümmungsmaß. Wir betrachten den Punkt von ξ mit dem von der Gleichung

$$(1) \quad p = \xi + (R_1 R_2) \eta$$

bestimmten Punkt p .

Sind ξ und $\bar{\xi}$ zwei Gegenpunkte, so ist nach der oben aufgestellten Voraussetzung

$$(1') \quad p - \bar{p} = \text{const.} = \xi - \bar{\xi} + (R_1 R_2) \eta - (\bar{R}_1 \bar{R}_2) \bar{\eta}.$$

Also

$$\xi - \bar{\xi} = (\bar{R}_1 \bar{R}_2) \bar{\eta} - (R_1 R_2) \eta + (\bar{R}_1 \bar{R}_2) \bar{B}'_1 \bar{\xi}_1 - (R_1 R_2) B'_1 \xi_1.$$

Wegen $(\xi, \eta, \bar{\xi}) = 0$ ist

$$(R_1 R_2), \bar{\eta} = (\bar{R}_1 \bar{R}_2), \bar{\eta}.$$

Daraus folgt⁽¹⁾

$$(2) \quad (R_1 R_2) = \text{const}$$

oder

$$(3) \quad (R_1 R_2) + (\bar{R}_1 \bar{R}_2) = \text{const.} \quad \text{w. z. b. w.}$$

N.B. Aus⁽²⁾ (3) folgt (2).

(II)

Wenn $\chi, \bar{\chi}$ zwei Gegenpunkte von einer Eifläche im R_3 und $\varphi, \bar{\varphi}$ die Schmiegunskugeln in χ bzw. $\bar{\chi}$ sind, so ergeben⁽³⁾ sich

$$\varphi = \xi + \gamma \chi,$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\xi} + \bar{\gamma} \bar{\chi},$$

wobei $\xi, \bar{\xi}$ in χ bzw. $\bar{\chi}$ berührende Kugeln sind.

Wegen

$$(\xi, \xi, \bar{\xi}) = 0$$

folgt aus meiner Arbeit⁽⁴⁾:

$$(1) \quad \gamma = \text{const} \quad \text{oder} \quad (2) \quad \bar{\chi} = \lambda \chi,$$

$$\text{wenn} \quad \chi_i = B'_i \chi, \quad \gamma, \bar{\chi} = \bar{\gamma}, \bar{\chi} \quad \text{sind.}^{(5)}$$

(III)

Setzen wir

- (1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über konvex-geschlossene Flächen, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1933), p. 192.
- (2) MATSUMURA, S.: Nachtrag zu der Arbeit über konvex-geschlossene Flächen, in Tôhoku Math. Journ., Bd. 36, p. 192/193, die jetzt unter der Presse in Tôhoku Math. Journ. ist.
- (3) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie (II), Abh. aus dem Ham. Seminar Bd. IV S. 123.
- (4) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa Japan, Vol. V., p. 36.
- (5) MATSUMURA, S.: Nachtrag zu der Arbeit über konvex-geschlossene Flächen, in Tôhoku Math. Journ., Bd. 36, p. 192/193, die jetzt unter der Presse in Tôhoku Math. Journ. ist.

$$\mathfrak{B}^2 + r^2 \neq 0$$

und

$$\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2 \neq 0$$

voraus, so werden die Krümmungskugeln ξ der Fläche b (u, v) durch

$$\xi + \frac{\mathfrak{S} \pm \sqrt{r^2 + \mathfrak{B}^2}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} b$$

und die Zentralkugel η resp. Mittenkugel durch

$$\xi + \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} b$$

gegeben.⁽¹⁾

Aus meiner Arbeit⁽²⁾ oder aus (1), unter geeigneten Bedingungen, folgt der

Satz 1: Die Eifläche ist dann und nur dann von der Fläche

$$\frac{\mathfrak{S} \pm \sqrt{r^2 + \mathfrak{B}^2}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} + \frac{\bar{\mathfrak{S}} \pm \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{\mathfrak{B}}^2}}{\bar{\mathfrak{S}}^2 - \bar{r}^2 - \bar{\mathfrak{B}}^2} = \text{const.},$$

oder von der Fläche

$$\frac{\mathfrak{S} \pm \sqrt{r^2 + \mathfrak{B}^2}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} = \text{const.},$$

wenn die beiden Krümmungskugeln $\xi, \bar{\xi}$ von Gegenpunkten zusammenfallen.

Satz 2: Die Eifläche ist dann und nur dann von der Fläche

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} + \frac{\bar{\mathfrak{S}}}{\bar{\mathfrak{S}}^2 - \bar{r}^2 - \bar{\mathfrak{B}}^2} = \text{const.},$$

oder von der Fläche

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - r^2 - \mathfrak{B}^2} = \text{const.},$$

wenn die beiden Mittelkugeln $\eta, \bar{\eta}$ von Gegenpunkten zusammenfallen.⁽²⁾

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. III (1929) S. 338.

(2) MATSUMURA, S.: Über konvex-geschlossene Flächen, Tôhoku. Math. Journ. Vol. 36. (1933) p. 192.

(IV)

Aus⁽¹⁾ (5) in P. FRANCKscher Arbeit⁽²⁾ folgt

$$M=A,$$

wenn $\varepsilon=0$ ist.

Aus (8) in P. FRANCKscher Arbeit ergibt sich

$$A=\sqrt{DM},$$

denn wenn $\varepsilon=0$ ist, so folgt⁽³⁾

$$p=d.$$

Also folgt aus (6) in P. FRANCKscher Arbeit

$$K=\text{const.}$$

So ergibt sich der Satz:⁽⁴⁾

Damit die Affinnormalen einer Fläche mit den Normalen zusammenfallen, ist es notwendig und hinreichend, dass die Fläche⁽⁴⁾ von konstanter Gaussischer Krümmung ist.⁽⁵⁾

Wenn ein Ovaloid diese Eigenschaft besitzt, so muss es nach dem wohlbekannten Satz von Liebmann Hilbert eine Kugel sein.

Die Fundamentalgrößen der Flächentheorie in \mathfrak{x} bezeichnen wir mit E, F, G, L, M, N und setzen D gleich der positiven Quadratwurzel aus $EG-F^2$.

Bei Zugrundlegung der Asymptotenlinien als Parameterlinien ist

$$(1) \quad L=0, \quad N=0$$

und die Fundamentalgrößen der affinen Flächentheorie können durch die Formeln

- (1) KUBOTA, T.: Ein Problem in der Affingeometrie, Science Report of the Tôhoku Imp. Univ. Vol. XVI (1927) p. 809.
- (2) FRANCK, P.: Über eine Klasse von Flächen mit verschwindender totaler Affinkrümmung, Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. VI (1924) S. 113.
- (3) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II (1923), S. 173.
- (4) SU, B.: Contributions to the Theory of Minimal Surfaces, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1929) p. 131.
- (5) FRANK, P.: Über affine Geometrie XXXII, Math. Zeits. 11 (1921) S. 299.

$$(2) \quad f = \sqrt{DM}, \quad a = f \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad D = f \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

erklärt werden.

Die Richtungskosinus der Flächennormale bezeichnen wir mit X , Y , Z und die der Affinnormale mit l , m , n .

Setzt man dann

$$(3) \quad A = M' + E \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 + 2F \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + G \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2$$

und A gleich der positiven Quadratwurzel aus dieser Grösse, so wird

$$(4) \quad l = \frac{x_{uv}}{A} = -\frac{1}{A\lambda} \{ \sigma x_u + x_v \}$$

und

$$(5) \quad \cos \varepsilon = \sum Xl = \frac{M}{A},$$

wobei ε der Winkel ist, welchen die Flächennormale mit der Affinnormale einschliesst und auch⁽¹⁾

$$(6) \quad \sigma x_u + x_v + \lambda x_{uv} = 0$$

ist.

Für die Punkte $\varepsilon=0$ ergibt sich aus (3) und (5):

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 E + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} F + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 G = 0,$$

d.h.

$$(8) \quad E \left(\frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v} \right)^2 + 2F \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v} + G = 0,$$

oder

$$(9) \quad E\sigma' + 2F\sigma + G = 0.$$

Aus (9) folgen

(1) Vergl. NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

$$(10) \quad \sigma = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - EG}}{E},$$

$$(11) \quad \lambda = \mp \frac{\sqrt{F^2 - EG}}{E_v},$$

oder

$$(12) \quad \lambda = -2 \left(\frac{-F^2 \pm F \sqrt{F^2 - EG} + EG}{EG_u} \right).$$

So ergibt sich

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{H} &= \frac{\lambda L \mu^2}{2DD^1} (-E_v F + G_u E) \left\{ (+\lambda_u) F E + \lambda L^2 + \frac{\lambda^2}{4D^2} \times \right. \\ &\quad \times (E_u^2 G + 2E_u E_v F + E E_v^2 - 4E F_u^2) + \lambda(1 + \lambda_u) \times \\ &\quad \times E_u + \frac{\mu^2 \lambda' E F L^3}{DD^1}, \\ \bar{K} &= \frac{L \lambda' \mu^2 F (-F_v F + G_u E)}{2D^2 \bar{D}^1}, \end{aligned} \right.$$

wobei $\mu = \lambda_v \sigma$ und (10), (11), (12) bestehen.

Für unsre Fläche⁽¹⁾ \mathfrak{E} ergibt sich

$$d_2 = -\frac{\sigma}{\lambda} \cdot D \cdot L,$$

$$d_3 = -\frac{1}{\lambda} \cdot D \cdot N,$$

denn⁽²⁾

$$d_2 = | \mathfrak{E}_{uvv} \mathfrak{E}_{uv} \mathfrak{E}_v |, \quad d_3 = | \mathfrak{E}_{uvv} \mathfrak{E}_{uv} \mathfrak{E}_v |,$$

$$\lambda \mathfrak{E}_{uv} + \sigma \mathfrak{E}_u + \mathfrak{E}_v = 0, \quad M = 0$$

sind.

(1) LEHMANN, P.: Über ein System von Fundamentalgrößen dritter Ordnung in der Flächentheorie, Sitzungsberichten der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien Bd. 126 (1917) S. 6.

(2) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922).

(V)

Wir betrachten quadratische und kubische Formen

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = e \, du^2 + 2f \, du \, dv + g \, dv^2, \\ \psi = A \, du^3 + 3B \, du^2 \, dv + 3C \, du \, dv^2 + D \, dv^3 \end{cases}$$

in differentialer Affingometrie.

Dann folgt

$$(2) \quad \begin{cases} A = \frac{d_1}{\sqrt{|eg-f^2|}} - \frac{3}{2} e_u & B = \frac{d_2}{\sqrt{|eg-f^2|}} - \frac{1}{2} e_v - f_u, \\ C = \frac{d_3}{\sqrt{|eg-f^2|}} - \frac{1}{2} g_u - f_v & D = \frac{d_4}{\sqrt{|eg-f^2|}} - \frac{3}{2} g_v \end{cases}$$

wobei d_1, d_2, d_3, d_4 fundamentale Grössen dritter Ordnung⁽¹⁾ sind.⁽²⁾

Wenn Rotationsnormal mit Meridianekurve zusammenfällt, dann folgt

$$(\xi_{uv}, \xi_u, \xi_v) = 0,$$

d.h.

$$d_u = 0:$$

(VI)

Man kann (ii) und (v) in JERVIS Arbeit⁽³⁾ leicht aus (15) LOCHS' Arbeit herausziehen.

Auch kann man aus LOCHS' Arbeit⁽⁴⁾ CARDAS Arbeit⁽⁵⁾ herleiten. Ist

$$(1) \quad x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$$

- (1) LEHMANN, S. J.: Über ein System von Fundamentalgrössen dritter Ordnung in der Flächentheorie, Sitzungsberichten der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien. Ed. 126 S. 1.
- (2) SU, B.: On the Theory of lines of Curvature of the Surface, Tôhoku Math. Journ. 30 (1929) p. 457.
- (3) SYBIL D JERVIS: Some Properties of Affine Normal, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1933) p. 320.
- (4) GUSTAV LOCHS: Die Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven bei einer ebenen Bewegung, Monatshefte für Math. und Physik Bd. 38 (1931) S. 44.
- (5) KARL CARDA: Über eine von L. N. M. Carnot berechnete Differentialinvariante, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung Vol. XXVIII (1919) S. 78.

die gegebene Gleichung einer Ebenekurve, so kann man aus JERVIS Arbeit wissen :

$$\begin{aligned}
 & \left(-3 \sin \omega \cdot \sigma + \cos \omega \cdot \frac{d\sigma}{d\omega} \right) x \\
 (2) \quad & + \left(3 \cos \omega \cdot \sigma + \sin \omega \cdot \frac{d\sigma}{d\omega} \right) y \\
 & = 3 \sigma \frac{d(\rho^{-\frac{1}{3}})}{d\omega} + \rho^{-\frac{1}{3}} \frac{d\sigma}{d\omega} \quad \text{ist.}
 \end{aligned}$$

die die Gleichung der Affinnormale von dem Krümmungsbild⁽¹⁾ von (1) ist, wobei

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \rho^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} \rho^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 - \frac{1}{3} \rho^{-\frac{4}{3}} \frac{d^2\rho}{d\omega^2}, \\
 \rho &= p + \frac{d^2p}{d\omega^2} \quad \text{ist.}
 \end{aligned}$$

Man kann

$$\begin{aligned}
 & \left(-3 \sin \omega \cdot \rho + \cos \omega \frac{d\rho}{d\omega} \right) x \\
 & + \left(3 \cos \omega \cdot \rho + \sin \omega \frac{d\rho}{d\omega} \right) y \\
 & = 3 \rho \frac{dp}{d\omega} + p \frac{d\rho}{d\omega}
 \end{aligned}$$

in JERVIS Arbeit⁽²⁾ in der Form

$$\frac{\cos \omega \cdot x + \sin \omega \cdot y - p}{\rho^{\frac{1}{3}}} = \phi$$

ausdrücken, wobei ϕ konstant aus ω ist. Hieraus folgt der

Satz: Das Verhältnis der Distanz von einem beliebigen Punkte auf der Affinnormale bis zu

(1) PAUL BÖHMER: Über elliptisch-konvexe Ovale, Math. Ann. Bd. 60 (1905) S. 256.

(2) l. c. (3).

$$x \cdot \cos \omega + y \cdot \sin \omega - p = 0$$

mit $\rho^{\frac{1}{2}}$ ist unabhängig von ω .

(2) Ueber zwei Flächen, welche eine Beziehung haben⁽¹⁾

(I)

Trägt man auf die Normalen einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, die schon in meiner Arbeit aufgenommen ist, eine konstante Strecke c auf, so bildet der Ort der Endpunkte eine Fläche $e(u, v)$.

Wenn E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrößen erster-bezw. zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}(u, v)$, e, f, g und l, m, n die Fundamentalgrößen erster-bezw. zweiter Ordnung von $e(u, v)$ sind, so folgt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = (1 - c^2 k) e + c(2 + ch) l, \\ F = (1 - c^2 k) f + c(2 + ch) m, \\ G = (1 - c^2 k) g + c(2 + ch) n, \\ L = l - c(ke - hl), \\ M = m - c(kf - hm), \\ N = n - c(kg - hn), \\ e = (1 - k^2 K) E - k(2 - kH) L, \\ f = (1 - k^2 K) F - k(2 - kH) M, \\ g = (1 - k^2 K) G - k(2 - kH) N, \\ l = L + k(KE - HL), \\ m = M + k(KF - HM), \\ n = N + k(KG - HN) \end{array} \right.$$

wobei K, k totale Krümmungen von $\mathfrak{x}(u, v)$ bzw. $e(u, v)$ sind.

Dann folgt

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0, \\ \sigma = \frac{E_v G - F G_u}{E G_u - F E_v}, \quad \frac{1}{2} \lambda = \frac{E G - F^2}{E_v F - G_u E}, \end{cases}$$

wobei (1) besteht.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0, \\ \sigma = \frac{[(1-c^2k)e + c(2+ch)l]_u [(1-c^2k)g + c(2+ch)n] - [(1-c^2k)e + c(2+ch)l] [(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u - \frac{[(1-c^2k)f + c(2+ch)m] [(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u}{[(1-c^2k)f + c(2+ch)m] [(1-c^2k)e + c(2+ch)l]_u}}{[(1-c^2k)e + c(2+ch)l]_u [(1-c^2k)g + c(2+ch)n] - [(1-c^2k)e + c(2+ch)l] [(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u - \frac{[(1-c^2k)f + c(2+ch)m]^2}{[(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u [(1-c^2k)e + c(2+ch)l]}}, \\ \frac{1}{2} \lambda = \frac{[(1-c^2k)e + c(2+ch)l] [(1-c^2k)g + c(2+ch)n] - [(1-c^2k)e + c(2+ch)l]_u [(1-c^2k)f + c(2+ch)m] - \frac{[(1-c^2k)f + c(2+ch)m]^2}{[(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u [(1-c^2k)e + c(2+ch)l]}}{[(1-c^2k)e + c(2+ch)l]_u [(1-c^2k)g + c(2+ch)n] - [(1-c^2k)e + c(2+ch)l] [(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u - \frac{[(1-c^2k)f + c(2+ch)m]^2}{[(1-c^2k)g + c(2+ch)n]_u [(1-c^2k)e + c(2+ch)l]}}. \end{cases}$$

Als die Folgerung aus der obigen Rechnung erhält man die folgende Beziehung⁽¹⁾

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{H} = \frac{\lambda L \mu^2}{2D\bar{D}^3} (-E_v F + G_u E) \left\{ (1 + \lambda_u)^2 E + \lambda^2 L^2 + \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda^2}{4D} (E_u^2 G + 2E_u E_v F + E E_v^2 - 4E F_u^2) + \right. \\ \quad \left. + \lambda (1 + \lambda_u) E_u \left\{ + \frac{\mu^2 \lambda E F L^3}{D\bar{D}} \right\} \right\}, \\ \bar{K} = \frac{L^2 \lambda^3 \mu^2 F (-E_v F + G_u E)}{2D^2 \bar{D}^4}, \end{cases}$$

wobei $\mu = \lambda_v - \sigma$ und (1) bestehen.

Setzen wir $\xi = Z \cdot \exp. \left(-\frac{\sigma}{\lambda} v - \frac{1}{\lambda} u \right)$ in

$$\lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0,$$

so geht für Z die Gleichung

$$(5) \quad Z_{uv} + c_1 Z = 0$$

mit $c_1 = -\frac{\sigma}{\lambda^2}$ hervor.⁽¹⁾

(II)

Setzen wir

$$\xi = c, \quad \frac{\sigma}{\lambda} = -\left(\varphi_v \cot \omega + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right), \quad \frac{1}{\lambda} = \varphi_u \cot \omega,$$

in

$$\lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0$$

ein, dann erhalten wir

$$(1) \quad C_{uv} - \left(\varphi_v \cot \omega + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) C_u + \varphi_u \cot \omega \cdot C_v = 0,$$

wo φ eine willkürliche Funktion von u, v, ω der konst. Winkel und

$$0 = \varphi_u \varphi_v + \cot \omega \cdot \varphi_{uv} - \cot \omega \cdot \frac{\varphi_u}{\varphi_v} \varphi_{vv}$$

ist.⁽²⁾

Das Verschwinden der Invariante J_2 erfordert :

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v} \right) + \cot \omega \cdot \varphi_{uv} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \varphi_u \varphi_v = 0.$$

Um eine Lösung dieser Gleichung zu erhalten, setzt Voß :

$$\varphi = f(u+v), \quad u+v=s, \quad f' = e^\zeta.$$

Und er erhält, indem er ζ zu unabhängigen Veränderlichen macht und

$\sigma = \frac{ds}{d\zeta}$ setzt, die Gleichung

(1) HANS JUSTUS JONAS: Über W-Strahlensysteme, Flächendeformation und äquidistante Kurvenscharen, Doktor-Dissertation, Halle (1908).

(2) VOLK, O.: Zur Voßschen Arbeit, Sitzungsberichten der Bayer. Akad. d. Wiss. (1924) S. 165.

$$(3) \quad -\frac{d\sigma}{d\zeta} + 2 \cot \omega e^{\tau} \sigma' + \frac{1}{\sin^2 \omega} e^{2\tau} \sigma^2 = 0,$$

die Voß nicht weiter behandelt.

Setzt man

$$W = \sigma e^{\tau},$$

so erhält man aus (3):

$$(4) \quad -\frac{dW}{d\zeta} - \omega - 2 \cot \omega W^2 - \frac{1}{\sin^2 \omega} W^3 = 0.$$

Durch die Substitution

$$tg t = \frac{W + \sin \omega \cos \omega}{\sin \omega}$$

findet man

$$e^{\tau} = C_1 e^{-\cot \omega t} \cos (\omega + t).$$

Es wird

$$(5) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{ds} = C_1 e^{-\cot \omega t} (\omega + t) = f'(u + v),$$

also

$$f = t + \gamma,$$

und die Gleichung (1) für C wird

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \{C_v + C_1 e^{-\cot \omega t} \sin (\omega + t) C\} + C_1 \cot \omega e^{-\cot \omega t} \cos (\omega + t) = 0,$$

und die Integration ergibt

$$(6) \quad C = \cos (\omega + t) \int \frac{V e^{-\cot \omega t}}{\cos (\omega + t)} dv + U \cos (\omega + t),$$

wo U, V die willkürlichen Funktionen von u bzw. v sind.

(3) Nachtrag zu der Arbeit über (I) in (I)

Nach Voraussetzung gelten gleichzeitig die Beziehungen

$$(4) \quad \eta + \bar{\eta} = 0, \quad \xi + \bar{\xi} = 0.$$

Es ist also auch

$$\bar{x} = \mu x$$

und wegen $\eta x = \eta \bar{x} = 1$ nach (4)

$$(5) \quad \bar{x} + x = 0.$$

Nun ist aber $x = \sqrt{R_1 R_2} \xi$, also nach (4) und (5)

$$(6) \quad R_1 R_2 = \overline{R_1 R_2} = \text{const.},$$

letzteres nach dem an der genannten Stelle Bewiesenen. Nach dem bekannten Satze von LIEBMANN ist die betrachtete Eifläche nach (6) stets eine Kugel.

Da für Kugeln umgekehrt auch stets die Voraussetzungen (1') von früher erfüllt sind, so ist hiermit bewiesen der:

Satz: Die Kugeln sind die einzigen Eiflächen, für die die Punkte $P = \xi + (R_1, R_2) \eta$ in Gegenpunkten zusammenfallen.

Man kann übrigens auch folgendermassen schliessen: Aus (4) und (1') folgt

$$(R_1 R_2) + \overline{(R_1 R_2)} = a = \text{constant},$$

$$\bar{x} - x = a \eta.$$

x ist also eine „Eifläche konstanter Affinbreite“, (Süß, W., Math. Ann. 96.) d. h. ein Ellipsoid, und da dies von konstanter Helligkeit sein muß, kommt nur die Kugel in Betracht.

Bei dem auf S. 193 (Tôhoku Math. Journ., Bd. 36) zuerst genannten Satz führt der analoge Beweis zunächst zu der Tatsache, dass die betrachtete Eifläche von konstanter Breite ist; versteht man unter H die Stützfunktion, so ist

$$(7) \quad H + \bar{H} = b = \text{const.}$$

Gleichzeitig aber gelten die obigen Gleichungen (4) und (5), aus denen wenigstens

$$(8) \quad R_1 R_2 = \overline{R_1 R_2}$$

gefolgert werden kann.

Nun sind bei Eiflächen konstanter Breite bekanntlich die Normalen zugleich im Gegenpunkt Normalen.

Also ist

$$(9) \quad R_i + \bar{R}_i = b \quad (i=1, 2).$$

Aus (8) und (9) aber folgt

$$(10) \quad R_1 + R_2 = b = \text{const.}$$

Nach einem bekannten Satz von CHRISTOFFEL sind aber die Kugeln die einzigen Eiflächen mit konstanter Summe der Hauptkrümmungsradien. Also lautet der wirklich bewiesene

Satz: *Die Kugel sind die einzigen Eiflächen, für die die Punkte*

$$p = \xi + H\eta$$

in Gegenpunkten zusammenfallen.

Aus (8) kann man nach MINKOWSKI übrigens auch schliessen, dass die Eifläche einen Mittelpunkt besitzen muss, weshalb sie nach (7) eine Kugel sein muß.

Nach dem auf der S. 193 (Tôhoku Math. Journ., Bd. 36) ausgesprochenen Satz ist zunächst

$$(11) \quad H^2 + \bar{H}^2 = c = \text{const.}$$

und zugleich aber wieder (8) gültig.

Nach MINKOWSKI hat die Eifläche ausser der a. a. O. genannten Eigenschaft betr. Pedalkurven von Projektionen auch einen Mittelpunkt. Nimmt man an, dass O dieser Mittelpunkt sei, so ist nach (11) der Satz bewiesen:

Die Kugel sind die einzigen Eiflächen mit dem Mittelpunkt O, für die die Punkte

$$p = \xi + H^2\eta$$

in Gegenpunkten zusammenfallen.

Auf dieselbe Weise führen auch die Ansätze zu Kugeln:

$$p = \xi + \frac{R_1 + R_2}{2} \eta,$$

$$p = \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \eta.$$

Aus

$$(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n, \eta) = 0$$

folgt⁽¹⁾

$$\eta = A' \xi,$$

wobei

$$\eta = \left(\frac{1}{H} \right)_i \bar{\eta} - \left(\frac{1}{H} \right)_i \eta.$$

Hier nehmen wir an

$$\eta = 0.$$

(1) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (I), Mem. of the Fac. of Sci. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V., No. 3 S. 36.

Beitraege zur Geometrie der Kreise und Kugeln (V)

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, April 7, 1933)

(1)

Es seien zwei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$ im R_n gegeben.

Ist $\mathfrak{y} = \rho_a \mathfrak{x}^a$ eine normierte Kugel im R_n durch \mathfrak{R} , so setzen wir

$$(1) \quad \mathfrak{y} \mathfrak{y} = \rho_a \rho_a A^{aa} = 1.$$

Dann muss sein

$$(2) \quad \cos \varphi = T^{ab} \rho_a \rho_b,$$

wobei φ den Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \tan^2 \varphi = - \frac{(A^{11} - T^{11}) \rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12}) \rho_1 \rho_2 + (A^{22} - T^{22}) \rho_2^2}{T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}.$$

Also folgt der

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\left| \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ A^{11} - T^{11} & A^{12} - T^{12} & A^{22} - T^{22} \\ \bar{A}^{11} - \bar{T}^{11} & \bar{A}^{12} - \bar{T}^{12} & \bar{A}^{22} - \bar{T}^{22} \end{array} \right| - \tan^2 \varphi \left| \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar{A}^{11} - \bar{T}^{11} & \bar{A}^{12} - \bar{T}^{12} & \bar{A}^{22} - \bar{T}^{22} \end{array} \right| -$$

$$- \tan^2 \varphi \left| \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ A^{11} - T^{11} & A^{12} - T^{12} & A^{22} - T^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{array} \right| +$$

$$+\tan^2\varphi \tan^2\bar{\varphi} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

unabhängig von

$$C_1\rho_1^2 + 2C_2\rho_1\rho_2 + C_3\rho_2^2 = 0$$

ist, ist die, dass die Kurvenscharen involutorisch zu

$$(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2 = 0$$

$$T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2 = 0$$

und involutorisch zu

$$(\bar{A}^{11} - \bar{T}^{11})\rho_1^2 - 2(\bar{A}^{12} - \bar{T}^{12})\rho_1\rho_2 + (\bar{A}^{22} - \bar{T}^{22})\rho_2^2 = 0$$

$$\bar{T}^{11}\rho_1^2 + 2\bar{T}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{T}^{22}\rho_2^2 = 0$$

gehören.

Aus (1), (2) folgt

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\cos^2\varphi)}{\partial\rho_1} = 2(T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2), \\ \frac{\partial(\eta\bar{\eta})}{\partial\rho_2} = 2(A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2), \end{cases}$$

so besteht

$$0 = (T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2)(A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2)$$

d.h.

$$(5) \quad 0 = T^{11}A^{12}\rho_1^2 + (A^{12}T^{12} + T^{11}A^{22})\rho_1\rho_2 + T^{12}A^{22}\rho_2^2.$$

Aus $\cos^2\varphi = k^2$ folgt

$$(6) \quad 0 = (T^{11} - k^2A^{11})\rho_1^2 + (T^{12} - k^2A^{12})\rho_1\rho_2 + (T^{22} - k^2A^{22})\rho_2^2.$$

Aus (5), (6) folgt

$$(7) \quad \frac{T^{11}A^{12}}{T^{11} - k^2A^{11}} = \frac{A^{12}T^{12} + T^{11}A^{22}}{T^{12} - k^2A^{12}} = \frac{T^{12}A^{22}}{T^{22} - k^2A^{22}}.$$

(7) ist die Bedingung dafür, dass

$$\cos^2 \varphi = k^2$$

ist.

Ist $\varphi = \varphi(t)$, dann folgt aus (2)

$$(8) \quad \sin^2 \varphi(t) = (A^{\alpha\beta}(t) - T^{\alpha\beta}(t)) \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wobei t ein Parameter ist.⁽¹⁾

Wenn $\sin^2 \varphi(t)$ die Maximum- oder Minimumwerte haben, dann folgt aus (8)

$$(9) \quad \left(-\frac{\partial A^{\alpha\beta}(t)}{\partial t} - \frac{\partial T^{\alpha\beta}(t)}{\partial t} \right) \rho_\alpha \rho_\beta = 0.$$

Also folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums von $\sin^2 \varphi(t)$ ist zwei.

Die quadratische Form

$$(10) \quad \cos \varphi = f(\rho, \rho) \equiv \sum_{i=1}^n \rho_i f_i(\rho) \equiv T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

wird durch die Substitution

$$(11) \quad \rho_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 \quad (i=1, 2)$$

in die Form

$$(12) \quad f(\alpha\alpha) \xi_1^2 + 2f(\alpha\beta) \xi_1 \xi_2 + f(\beta\beta) \xi_2^2$$

übergeführt, also, auf unendlich viele Arten als Quadratsumme

$$(13) \quad \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$$

dargestellt, da die Gleichung $f(\alpha\beta) = 0$ auf unendlich viele Arten erfüllbar ist.

Das Trägheitsgesetz gibt die Invarianz aller möglichen Quadrate, der positiven und der negativen.

Aus (2) folgt

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (I), Faculty of Science and Agriculture Taihoku Imp. Univ. Vol. V (1932) p. 121.

$$(13') \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta}, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = \rho_\alpha \rho_\beta \bar{T}^{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Aus $T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}$ folgt:⁽¹⁾

$$\cos \varphi = \pm \cos \bar{\varphi},$$

$$d\sigma_1 = dt,$$

$$d\sigma_2 = dt,$$

d. h. $d\sigma_1 = d\sigma_2.$

Aus $T^{\alpha\beta} = \text{const.}$ $\bar{T}^{\alpha\beta}$ ergibt sich

$$\cos \varphi = \pm \text{const.} \cos \bar{\varphi}.$$

Wenn der Winkel zwischen η und \mathfrak{R} gleich Null ist, dann folgt aus (2)

$$(14) \quad T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2 = 1,$$

wobei

$$(15) \quad A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2 = 1.$$

Aus (2) folgt

$$(16) \quad \begin{cases} \cos 2\varphi = (2T^{11} - A^{11})\rho_1^2 + 2(2T^{12} - A^{12})\rho_1\rho_2 + (2T^{22} - A^{22})\rho_2^2, \\ \tan^2 \varphi = \frac{(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2}{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}, \\ \cos^2 \varphi = \frac{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2}, \\ \sin^2 \varphi = \frac{(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2}. \end{cases}$$

Man kann (16) untersuchen wie in (3). φ muss von ρ_α unabhängig sein. Das ist nur möglich für

$$T^{\alpha\beta} \text{ prop. } A^{\alpha\beta}.$$

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von Möbius, Memoirs of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ. Vol. II (1929), p. 13.

Wir meinen :

$$(17) \quad \cos^{\circ} \varphi = T^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \rho_{\beta}, \quad \cos^{\circ} \bar{\varphi} = T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta},$$

wobei

$$(18) \quad A^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} = 1, \quad \bar{A}^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} = 1.$$

Aus (18) folgt

$$(19) \quad (A^{\alpha\beta} - \bar{A}^{\alpha\beta}) \rho_{\alpha} \rho_{\beta} = 0.$$

Also folgt aus (17) und (19)

$$(20) \quad \frac{\cos' \varphi}{\cos'' \varphi} = - \frac{T^{11} J^2 + 2J T^{12} (A^{11} - \bar{A}^{11}) + T^{22} (A^{11} - \bar{A}^{11})^2}{T^1 J^2 + 2J T^{12} (A^{11} - \bar{A}^{11}) + T^{22} (A^{11} - \bar{A}^{11})^2},$$

wobei

$$J \equiv A^{12} - A^{12} \pm \sqrt{(A^{11} - \bar{A}^{11})^2 - (A^{11} - \bar{A}^{11})(A^{22} - \bar{A}^{22})}$$

ist.

Aus (16) folgt, daß φ von ρ_1 und ρ_2 unabhängig ist, wenn die Bedingungen

$$(21) \quad A^{11} : A^{12} : A^{22} = T^{11} : T^{12} : T^{22}$$

bestehen.

Unsre Bedingungen erfordern, dass es eine Funktion x braucht, die den Gleichungen

$$A^{11} = x T^{11}, \quad A^{12} = x T^{12}, \quad A^{22} = x T^{22}$$

genügt.

Wenn $\varphi = 0$ ist, dann folgt aus (2)

$$(22) \quad T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2 = 1$$

Aus (1) und (22) folgt

$$(23) \quad (A^{11} - T^{11}) \rho_1^2 + 2 (A^{12} - T^{12}) \rho_1 \rho_2 + (A^{22} - T^{22}) \rho_2^2 = 0.$$

Wenn

$$\frac{A^{11} - T^{11}}{A^{12} - T^{12}} = \frac{A^{12} - T^{12}}{A^{22} - T^{22}},$$

dann

$$\varphi=0$$

in einer Stelle.

Wir gewinnen zwei Kugeln

$$\eta^I = \bar{\rho}_a \eta^a, \quad \eta^{II} = \bar{\bar{\rho}}_a \eta^a,$$

wobei

$$(T^{ab} - x^2 A^{ab}) \bar{\rho}_a \bar{\rho}_b = 0, \quad (T^{ab} - x^2 A^{ab}) \bar{\bar{\rho}}_a \bar{\bar{\rho}}_b = 0 \quad \text{siad,}$$

wenn

$$\cos^2 \varphi = x^2$$

ist.

Ist p eine Kugel durch $\bar{\mathfrak{R}}$, dann kann man setzen

$$p = + \sqrt{\frac{T^{ab} \rho_a \rho_b}{A^{ab} \rho_a \rho_b}} \eta, \quad \text{wobei } \cos \hat{p}\eta = \cos \varphi,$$

oder wenn man ξ geeignet erwählt, dann kann man setzen :

$$p = \xi + \sqrt{\frac{T^{ab} \rho_a \rho_b}{A^{ab} \rho_a \rho_b}} \eta,$$

wobei

$$\cos \hat{p}\eta = \cos \hat{\xi}\eta + \cos \varphi.$$

(2)

$$(1) \quad \varphi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = \text{const.}$$

bezeichnet⁽¹⁾ eine Schar von Kurvenpaaren.²

Aus (1) folgt

$$d\varphi = \varphi_{\xi^I} d\xi^I + \varphi_{\xi^{II}} d\xi^{II} + \varphi_{\xi^{III}} d\xi^{III} = 0,$$

d. h.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. (1925), S. 138.

(2) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (I), Memoirs of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1932) p. 142.

$$(2) \quad d\varphi=0.$$

Ist die Paffs Gleichung

$$X d\xi^I + Y d\xi^{II} + Z d\xi^{III} = 0$$

auf die Form (2) reduzibel, so kann dies vorerst so eintreten, dass ihre linke Seite direkt $d\varphi$ gleich ist, also dass

$$X d\xi^I + Y d\xi^{II} + Z d\xi^{III}$$

ein vollständiges Differential ist.

Dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, dass die drei Relationen

$$Y\xi^{III} - Z\xi^{II} = 0, \quad Z\xi^I - X\xi^{III} = 0, \quad X\xi^{II} - Y\xi^I = 0$$

identisch bestehen.

Wenn die Relarian

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi^{II}} - \frac{\partial Y}{\partial \xi^{III}} \right) + Y \left(\frac{\partial X}{\partial \xi^{III}} - \frac{\partial Z}{\partial \xi^I} \right) \\ + Z \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi^I} - \frac{\partial X}{\partial \xi^{II}} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

obwohl die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \xi^{II}} - \frac{\partial Y}{\partial \xi^{III}} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \xi^{III}} - \frac{\partial Z}{\partial \xi^I} &\equiv 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi^I} - \frac{\partial X}{\partial \xi^{II}} &\equiv 0 \end{aligned}$$

nicht erfüllt sind, besteht, so kann Paffs Ausdruck

$$\begin{aligned} X(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) d\xi^I + Y(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) d\xi^{II} + \\ + Z(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) d\xi^{III} \end{aligned}$$

auf die Form

$$\phi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) \cdot d\psi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III})$$

gebracht werden.

$$\varphi(x^I + d x^I, x^{\text{II}}, x^{\text{III}}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x^I, x^{\text{II}} + d x^{\text{II}}, x^{\text{III}}) = 0$$

bedeutet zwei benachbarte Punkte von

$$(3) \quad \varphi(x^I, x^{\text{II}}, x^{\text{III}}) = 0.$$

Eine Parameterdarstellung der Kurvenpaare (3) ergibt:

$$(4) \quad x^I = f_1(u, v), \quad x^{\text{II}} = f_2(u, v), \quad x^{\text{III}} = f_3(u, v).$$

Darin sollen f_1, f_2, f_3 innerhalb eines gewissen Bereiches eine einwertige analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v sein, und zwei dieser drei Funktionen sollen voneinander unabhängig sein, d.h. nicht alle drei Funktionaldeterminanten

$$(f_1)_u (f_1)_v - (f_3)_u (f_2)_v,$$

$$(f_3)_u (f_1)_v - (f_1)_u (f_3)_v,$$

$$(f_1)_u (f_2)_v - (f_2)_u (f_1)_v$$

sollen für beliebige erlaubte Wertepaare u, v verschwinden.

Jedes Kurvenpaar kann auf unendlich viele verschiedene Arten in Parameterdarstellung gegeben werden.

Wenn man nämlich in (4) statt u und v zwei voneinander unabhängige Funktionen

$$(5) \quad u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

von zwei neuen Parametern \bar{u}, \bar{v} setzt, so werden $x^I, x^{\text{II}}, x^{\text{III}}$ die Funktionen von \bar{u}, \bar{v} , so dass eine neue Parameterdarstellung des Kurvenpaares (4) ergibt:

$$(6) \quad x^I = \Phi(\bar{u}, \bar{v}), \quad x^{\text{II}} = X(\bar{u}, \bar{v}), \quad x^{\text{III}} = \Psi(\bar{u}, \bar{v}).$$

Jetzt sind zwei der drei Funktionen Φ, X, Ψ voneinander auch unabhängig.

Liegt eine Darstellung

$$x^I = f_1(u, v), \quad x^{\text{II}} = f_2(u, v), \quad x^{\text{III}} = f_3(u, v)$$

einem Kurvenpaar mittels zweier Parameter u und v vor, so ergibt sich

aus ihr die allgemeinste Parameterdarstellung ein und desselben Kurvenpaares dadurch, dass u und v zwei voneinander unabhängigen Funktionen

$$(7) \quad u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

zwei neuer Parameter \bar{u} und \bar{v} gleich gesetzt und diese Funktionen statt u und v in die gegebenen Gleichungen eingeführt werden.

Geben wir dem u einen bestimmten Wert u , während wir v veränderlich sein lassen, so ergeben sich diejenigen Punkte (ξ^I , ξ^{II} , ξ^{III}) des Kurvenpaares, für die

$$(8) \quad \xi^I = f_1(u, v), \quad \xi^{II} = f_2(u, v), \quad \xi^{III} = f_3(u, v)$$

ist.

Auf einem Kurvenpaar mit den Parametern u und v wird jeder durch eine Gleichung

$$(9) \quad \Omega(u, v) = 0$$

zwischen u und v definiert.

Eine einfache unendliche Schar von Kreisen auf dem Kurvenpaar (4) wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und v definiert:

$$(10) \quad U(u, v) dv - V(u, v) du = 0.$$

Man gelangt sehr oft in der Theorie der Flächenkurven zu den Gleichungen, die in du und dv homogen und quadratisch sind:

$$(11) \quad A(u, v) du^2 + 2B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = 0.$$

Nach der Theorie der quadratischen Gleichungen lässt sich eine derartige Gleichung zerspalten in

$$[A du + (B + \sqrt{B^2 - AC}) dv] [A du + (B - \sqrt{B^2 - AC}) dv] = 0,$$

so dass sie in zwei Differentialgleichungen von der Form (10), nämlich in

$$A du + (B \pm \sqrt{B^2 - AC}) dv = 0$$

zerfällt, die allerdings nur im Falle $B^2 - AC \neq 0$ voneinander verschieden sind.

(3)

Betrachten wir n Kugeln $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ im R_n und setzen :

$$(1) \quad \xi_i = \xi_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n,$$

so ist die Parameterdarstellung den Kurven im R_n durch n solcher Funktionen $\xi_i(t)$ — die wir analytisch voraussetzen — im allgemeinen gegeben.

Bezeichnen wir die Ableitungen des $\xi_i(t)$ nach dem Parameter mit Strichen, so ist $\xi_i(t)$ des R_n bekanntlich dann und nur dann in keinem Unterraum geringerer Dimensionszahl gelegen, wenn

$$(2) \quad \Delta \equiv (\xi'_i, \xi''_i, \dots, \xi^{(n)}_i) \neq 0 \quad \{t\},$$

d.h. wenn die ersten n Ableitungen des ξ_i linear unabhängig sind.

Nun betrachten wir Punkte

$$(3) \quad \alpha(t), \quad [\alpha^2(t)=0],$$

wobei

$$(4) \quad \alpha \xi' = \alpha \xi'' = \alpha \xi^{(3)} = \dots = \alpha \xi^{(n-1)} = 0.$$

Bildet man das Determinantenquadrat

$$(\alpha, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1)})^2,$$

so folgt wegen

$$(\alpha, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1)}) \equiv 0 \quad \{t\}.$$

Somit besteht die lineare Beziehung

$$(5) \quad \alpha_0 \alpha + \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \xi'' + \dots + \alpha_{n-1} \xi^{(n-1)} \equiv 0 \quad \{t\}.$$

Wenn wir nunmehr (5) jeweils skalar mit den Vektoren multiplizieren

$$\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1)}$$

und wiederum die Gleichungen (2), (3) benutzen, so entsteht das System :

$$a_1 \xi_1'^2 + a_2 \xi_1' \xi_1'' + a_3 \xi_1' \xi_1''' + \dots + a_{n-1} \xi_1' \xi_1^{(n-1)} = 0$$

$$a_1 \xi_1' \xi_1'' + a_2 \xi_1''^2 + a_3 \xi_1'' \xi_1''' + \dots + a_{n-1} \xi_1'' \xi_1^{(n-1)} = 0$$

.....

$$a_1 \xi_1^{(n-1)} \xi_1' + a_2 \xi_1^{(n-1)} \xi_1'' + a_3 \xi_1^{(n-1)} \xi_1''' + \dots + a_{n-1} \xi_1^{(n-1)2} = 0$$

welches abgesehen von der wegen

$$a_0 \neq 0$$

unbrauchbaren Lösung

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$$

auf die notwendige Bedingung

$$\begin{vmatrix} \xi_1'^2 & \xi_1' \xi_1'' & \xi_1' \xi_1''' & \dots & \xi_1' \xi_1^{(n-1)} \\ \xi_1'' \xi_1' & \xi_1''^2 & \xi_1'' \xi_1''' & \dots & \xi_1'' \xi_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{(n-1)} \xi_1' & \xi_1^{(n-1)} \xi_1'' & \xi_1^{(n-1)} \xi_1''' & \dots & \xi_1^{(n-1)2} \end{vmatrix} = 0$$

führt.

(4)

$$(\theta_t, \theta_t) dt^2 + 2 \sqrt{(\theta_t, \theta_t) (\theta_\tau, \theta_\tau)} dt d\tau - (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

d.h.

$$(1) \quad \sqrt{(\theta_\tau, \theta_\tau)} dt + (1 \pm \sqrt{2}) \sqrt{(\theta_\tau, \theta_\tau)} d\tau = 0$$

und

$$(\theta_t, \theta_t) dt^2 - 2 \sqrt{(\theta_t, \theta_t) (\theta_\tau, \theta_\tau)} dt d\tau - (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2 = 0$$

d.h

$$(2) \quad \sqrt{(\theta_t, \theta_t)} dt - (1 \mp \sqrt{2}) \sqrt{(\theta_\tau, \theta_\tau)} d\tau = 0$$

bilden harmonische Büschel⁽¹⁾ mit

(1) HAYASHI, T.: Certain double Systemes of Curves on a Surface, Science Reports of the Tohoku Imp. Univ. Vol. VIII p. 217.

$$(\theta, \theta_i) dt^2 + (\theta_i, \theta_i) dx^2 = 0.$$

(5)

Betrachten wir drei benachbarte Geraden \mathfrak{x} , $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + d^2\mathfrak{x}$ im R_2 , die sich schneiden, dann folgt

$$(*) \quad \begin{cases} (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + d^2\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + d^2\mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + d^2\mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + d^2\mathfrak{x}) = 0, \end{cases}$$

wobei \mathfrak{x} Kleins Koordinaten ist.⁽¹⁾

Aus (*) folgt

$$(d^2\mathfrak{x}, d^2\mathfrak{x}) = 0.$$

$$(1) \quad \mathfrak{y} \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{y}} \bar{\mathfrak{y}} = 0$$

ist die Bedingung²⁾ für das Schneiden der beiden Geraden \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{y}}$.

Wenn sich \mathfrak{y} aller Nachbarschaften $\bar{\mathfrak{y}}$ durchkreuzen, dann muß

$$(2) \quad \mathfrak{y} \bar{\mathfrak{y}}_u = \mathfrak{y} \bar{\mathfrak{y}}_v = 0$$

erfüllt sein.⁽³⁾

Setzen wir

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{y}}_v = \rho \mathfrak{y} + \sigma \bar{\mathfrak{y}}, \\ \bar{\mathfrak{y}}_u = \bar{\rho} \bar{\mathfrak{y}} + \bar{\sigma} \mathfrak{y}, \end{cases}$$

so folgt

(1) JESSOP: A Treatise on the Line Complex, Cambridge (1903) S. 20.

(2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Hyperboloidscharen Tôhoku Math. Journ. Vol. 31 (1929) p. 250.

(3) THOMSEN, G.: Über eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung, Abh. aus dem Math. Seminar, Bd. IV (1926) S. 249.

$$(4) \quad \bar{\eta}_u \bar{\eta}_v = 0$$

wobei $\rho, \bar{\rho}, \sigma, \bar{\sigma}$ skalare Grössen sind.

Aus (4) folgt, dass zwei Geraden

$$\bar{\eta} + \bar{\eta}_u \text{ und } \bar{\eta} + \bar{\eta}_v$$

sich schneiden.

Aus (1), (3) folgt

$$(5) \quad (\bar{\eta}_v \bar{\eta}_i) = (\bar{\eta}_u \bar{\eta}_u) = (\bar{\eta}_v \bar{\eta}_u) = 0.$$

Es sei gegeben :

$$(6) \quad \begin{cases} \eta_r = \alpha \eta + \bar{\eta}, \\ \bar{\eta}_u = \bar{\alpha} \bar{\eta} + \eta, \end{cases}$$

dann folgt

$$(7) \quad (\eta_u \eta_i) = 0,$$

wobei $\alpha, \bar{\alpha}$ zwei skalare Grössen

$$\eta + \eta_u \text{ und } \eta + \eta_v$$

sich schneiden.

(6)

Hier mögen wir relative Kreisflächentheorie untersuchen. Es handelt sich im folgenden um die Einführung einer Beziehung zwischen (θ, θ_k) und dem relativen Bogenelement φ einer Fläche (\mathfrak{X}) bezüglich einer Eichfläche (e) . Zwischen (θ, θ_k) und φ ist eine Beziehung

$$\varphi = E dt^2 + 2 F dt d\tau + G d\tau^2, \quad E = \bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_i \theta_i),$$

$$F = \bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_i \theta_\tau), \quad G = \bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_\tau \theta_\tau),$$

zu definieren.⁽¹⁾

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kurven, (1); Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V., No. 3, p. 103 (1932).

Dann folgen aus DUSCHEKS Arbeit¹⁾ die Beziehungen

$$\bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_t \theta_t) = e = -l,$$

$$\bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_t \theta_\tau) = f = -m,$$

$$\bar{\lambda}(t, \tau) \cdot (\theta_\tau \theta_\tau) = g = -n,$$

$$K(t, \tau) = \sqrt{\frac{ln - m^2}{EG - F^2}} = \bar{\lambda}(t, \tau),$$

wenn man (x) mit der Eifläche (e) zusammenfallen lässt, so folgt

$$\varphi = K(t, \tau) \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\},$$

$$\phi_0 = -K(t, \tau) \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\},$$

$$\varphi_0 = K(t, \tau) \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\}.$$

So ist leicht zu bestätigen die Richtigkeit der Relation²⁾:

$$\bar{\lambda}(t, \tau) \varphi - 2H\phi + \phi_0 = 0.$$

Also folgt

$$\begin{cases} K = \bar{\lambda}(t, \tau), & H = \frac{\bar{\lambda}\varphi + \phi_0}{\phi}, \\ \delta O = 2 \iint H dt d\tau, \end{cases}$$

wobei H die mittlere Relativkrümmung ist, K die totale Relativkrümmung und O die Relativoberfläche.

Für die Relativkugel ergibt sich

$$\bar{\lambda}(t, \tau) = \frac{(\bar{\lambda}\varphi + \phi_0)^2}{\phi^2}.$$

(7)

Wir betrachten drei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ im R_3 , die durch die beiden Kugelpaare \mathfrak{g}^s , $\bar{\mathfrak{g}}^s$ und $\bar{\bar{\mathfrak{g}}}^s$ [$\alpha, \beta, \gamma = \text{I, II}$] dargestellt sind.

(1) DUSCHEK, A.: Über relative Flächentheorie (11), Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien Mathem.-naturw. Klasse. Bd. 5 und 6, S. 265 (1927).

(2) Vergl. l. c. (1).

Wir definieren :

$$A^{\alpha\beta} = (\xi^\alpha \xi^\beta), \quad \bar{A}^{\alpha\beta} = (\bar{\xi}^\alpha \bar{\xi}^\beta), \quad \bar{\bar{A}}^{\alpha\beta} = (\bar{\bar{\xi}}^\alpha \bar{\bar{\xi}}^\beta).$$

$$S^{\alpha\beta} = (\xi^\alpha \bar{\xi}^\beta), \quad \bar{S}^{\alpha\beta} = (\bar{\xi}^\alpha \xi^\beta),$$

$$T^{\alpha\beta} = \bar{\bar{A}}_{\lambda\mu} S^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu} = S_{,\mu}^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu}, \quad \bar{T} = \bar{\bar{A}}_{\lambda\mu} \bar{S}^{\alpha\lambda} \bar{S}^{\beta\mu} = \bar{S}_{,\beta}^{\alpha\lambda} \bar{S}^{\beta\mu}.$$

Sind $\eta = \rho_\alpha \xi^\alpha$, $\bar{\eta} = \rho_\alpha \bar{\xi}^\alpha$ die normierten Kugeln durch \mathfrak{R} bzw. $\bar{\mathfrak{R}}$ mit

$$\eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

$$\bar{\eta} \bar{\eta} = \rho_\alpha \rho_\beta \bar{A}^{\alpha\beta} = 1,$$

so muss

$$\cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta},$$

$$\cos^2 \bar{\varphi} = \rho_\alpha \rho_\beta \bar{T}^{\alpha\beta}$$

sein; wobei φ , $\bar{\varphi}$ die Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$ bzw. $\bar{\eta}$ und \mathfrak{R} sind.

Wenn $\varphi \equiv \bar{\varphi}$ ist, dann muss

$$T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}$$

sein.

In dem Fall (1) seien \mathfrak{R} und $\bar{\mathfrak{R}}$ die Funktionen von u bzw. t , dann bilden $\mathfrak{R}(u)$ und $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ zwei Kreisflächen, und ergibt sich :

$$(1) \quad A^{\alpha\beta}(u) \rho_\alpha \rho_\beta = 1,$$

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T(u, t) \rho_\alpha \rho_\beta.$$

Wenn die Kugeln durch jeden der beiden Kreise \mathfrak{R} und $\bar{\mathfrak{R}}$ zu dem anderen senkrecht sind, dann entsteht :

$$(3) \quad \rho_\alpha (\xi^\alpha \bar{\xi}^\lambda) \equiv \rho_\alpha S^{\alpha\lambda} = 0.$$

Aus (1), (2) und (3) eliminieren wir ρ_α , ρ_β , dann ergibt sich φ als Funktion von t und u .

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{\mathbf{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{\mathbf{A}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} = \frac{\mathbf{T}^{11} + 2 \mathbf{T}^{12} \lambda + \mathbf{T}^{22} \lambda^2}{\mathbf{A}^{11} + 2 \mathbf{A}^{12} \lambda + \mathbf{A}^{22} \lambda^2}$$

wieder, wobei λ veränderlich ist. Wir wollen setzen :

$$(2) \quad \frac{\partial \cos^2 \varphi}{\partial \lambda} = 0.$$

Aus (2) folgt

$$(\mathbf{A}^{11} + 2\mathbf{A}^{12}\lambda + \mathbf{A}^{22}\lambda^2)(\mathbf{T}^{12} + \mathbf{T}^{22}\lambda) - (\mathbf{T}^{11} + 2\mathbf{T}^{12}\lambda + \mathbf{T}^{22}\lambda^2)(\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{22}\lambda) = 0$$

oder

$$(3) \quad \frac{\mathbf{A}^{11} + 2\mathbf{A}^{12}\lambda + \mathbf{A}^{22}\lambda^2}{\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{22}\lambda} = \frac{\mathbf{T}^{11} + 2\mathbf{T}^{12}\lambda + \mathbf{T}^{22}\lambda^2}{\mathbf{T}^{12} + \mathbf{T}^{22}\lambda},$$

$$(4) \quad \frac{\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{22}\lambda}{\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{22}\lambda} = \frac{\mathbf{T}^{11} + \mathbf{T}^{22}\lambda}{\mathbf{T}^{12} + \mathbf{T}^{22}\lambda},$$

d.h.

$$(5) \quad (\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{12} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{11}) + (\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{11})\lambda \\ + (\mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{12})\lambda^2 = 0$$

oder in Determinantenform nach Multiplikation mit ρ^2 wird geliefert :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A}^{11}\rho_1 + \mathbf{A}^{12}\rho_2 & \mathbf{A}^{12}\rho_1 + \mathbf{A}^{22}\rho_2 \\ \mathbf{T}^{11}\rho_1 + \mathbf{T}^{12}\rho_2 & \mathbf{T}^{12}\rho_1 + \mathbf{T}^{22}\rho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Wurzeln $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ dieser quadratischen Gleichung bestimmen die Maximum- oder Minimumwerte von $\cos^2 \varphi$.

Wenn

$$(\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{12} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{11}) + (\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{11})\lambda_i \\ + (\mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{12})\lambda_i^2 = 0, \quad (i=1, 2),$$

dann folgt aus (5)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{11}}{\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{12} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{11}},$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{22} - \mathbf{A}^{22}\mathbf{T}^{12}}{\mathbf{A}^{11}\mathbf{T}^{12} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{T}^{11}}$$

(9)

Betrachten wir Kreisflächen⁽¹⁾

$$\vartheta = \vartheta(t, \tau),$$

dann sind ϑ die Lösungen der partiellen Differentialgleichung⁽²⁾

$$\begin{aligned} \Delta^2 \vartheta \equiv \frac{1}{T} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}}{T} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{(\theta_t \theta_t) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial t}}{T} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$T = \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}.$$

Die Kreisfläche sei auf ein isometrisches Koordinatennetz bezogen, und es werde für dieses von vornherein angenommen :

$$(\theta_t \theta_t) = (\theta_\tau \theta_\tau), \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \Delta^2 \vartheta &= \frac{1}{(\theta_t \theta_t)} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} \right). \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

weist auf einen Zusammenhang der Minimalflächen mit den Funktionen einer komplexen Veränderlichen hin.

Wir wollen alle Punkte der Kreisfläche suchen, wo $\varphi(t, \tau)$ denselben Wert a besitzt, wobei $\varphi(t, \tau)$ eine gegebene Funktion von t und τ ist.

Dann folgt

$$(1) \quad \varphi(t, \tau) = a.$$

- (1) KNOBLAUCH, J. Grundlagen der Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig, (1913) S. 433.
- (2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VIII), Tôhoku Math. Journ. Vol. 32 (1930) S. 214.

Aus (1) ergibt sich

$$(2) \quad \frac{\varphi_t}{\varphi_\tau} = \frac{(\theta_t, \theta_t) \frac{dt}{ds} + (\theta_t, \theta_\tau) \frac{d\tau}{ds}}{(\theta_t, \theta_\tau) \frac{dt}{ds} + (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{d\tau}{ds}}$$

oder, ist σ Proportionalitätsfaktor, so ist

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_t = \sigma \left((\theta_t, \theta_t) \frac{dt}{ds} + (\theta_t, \theta_\tau) \frac{d\tau}{ds} \right), \\ \varphi_\tau = \sigma \left((\theta_t, \theta_\tau) \frac{dt}{ds} + (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{d\tau}{ds} \right), \end{cases}$$

wo s die Bogenlänge der gesuchten Kurve auf unserer Kreisfläche ist.⁽¹⁾
Ist insbesondere

$$\varphi = a$$

der thermische Parameter, so muß

$$\Delta'' \varphi = 0$$

sein.

$\Delta'' \varphi = 0$ bedeutet aber, dass es eine Funktion ψ derart gibt, dass

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{(\theta_t, \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2}} \end{cases}$$

ist.

Setzt man aber

$$\varphi_1 = \theta(\varphi),$$

so kann die Funktion θ so bestimmt werden, dass φ_1 der thermische Parameter ist.

(1) KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K.: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II (1931) S. 24.

Es muss dann

$$\mathcal{A}'' \{ \theta (\varphi) \} = 0$$

sein, doch entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' \{ \theta (\varphi) \} &= \theta' (\varphi) \mathcal{A}'' \varphi + \theta'' (\varphi) \mathcal{A}' (\varphi) = 0. \\ (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2 (\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 &= 0 \end{aligned}$$

ist die Gleichung von Minimallinien.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien des zweiten Mantels ist⁽¹⁾

$$(S C_{ik} - K B_{ik}) \delta u^i \delta u^k = 0, \quad (u^i = t, u^k = \tau)$$

Also ist die Bedingung für die harmonische Trennung der beiden Elementenpaare

$$\begin{aligned} (\theta_t \theta_t) \{ S C_{22} - K B_{22} \} + (\theta_\tau \theta_\tau) \{ S C_{11} - K B_{11} \} - \\ - 2 (\theta_t \theta_\tau) \{ S C_{12} - K B_{12} \} = 0. \end{aligned}$$

(10)

Wir haben zwei quadratische Formen

$$(1) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta; \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

deren erste wegen $A > 0$ sicher nicht ausgeartet ist. Bekanntlich gilt nun der Satz, dass man solche in Formenpaar immer durch eine lineare Transformation

$$(2) \quad \tilde{x}^a = \sum_{\beta=1}^n c_\beta^a \tilde{x}^\beta \quad [a=I, II]$$

in das Formenpaar

$$(3) \quad \rho_1^2 + \rho_{II}^2 \quad \text{und} \quad T^{II} \rho_1^2 + T^{22} \rho_{II}^2$$

überführen kann, bei dem nur reinquadratische Glieder stehen bleiben, was im allgemeinen auf eine und nur eine Art geht, allein im Falle

(1) BLASCHKE, W.: Beiträge zur Flächentheorie, Abh. aus Math. Seminar der Hamb. Univ. (1925) S. 9.

$$(4) \quad T^{\alpha\beta} \text{ prop. } A^{\alpha\beta}$$

auf unendlich viele.

Schliessen wir den Fall (4) aus, so können wir also auf eine und nur eine Art zwei Hilfskugeln durch \mathfrak{K} annehmen, sodass

$$(5) \quad A^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad T^{12} = 0$$

wird.

Ebenso können wir die Kugeln durch $\bar{\mathfrak{K}}$ auf nur eine Art wählen, so

$$(6) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \bar{T}^{12} = 0$$

wird, wenn wir den Fall

$$(7) \quad \bar{T}^{\lambda\mu} \text{ prop. } \bar{A}^{\lambda\mu}$$

ausschliessen.

Wenden wir auf

$$(8) \quad \cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta}$$

die spezielle Transformation (3) (5) (6) an, so ergibt sich für die zugehörigen :

$$(9) \quad \rho_I = \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi - T^{22}}{T^{11} - T^{22}}}; \quad \rho_{II} = \pm \sqrt{\frac{T^{11} - \cos^2 \varphi}{T^{11} - T^{22}}}.$$

Die Winkelhalbierenden Kugeln von $\sigma_\alpha \xi^\alpha$ und $\tau_\alpha \xi^\alpha$ sind durch

$$(10) \quad \eta = \sigma_\alpha \xi^\alpha + \tau_\alpha \xi^\alpha \quad \text{und} \quad \zeta = \sigma_\alpha \xi^\alpha - \tau_\alpha \xi^\alpha$$

gegeben.⁽¹⁾

Sie fallen aber nach (9) mit ξ^I und ξ^{II} zusammen. Da diese Kugeln von φ gar nicht abhängen, bleiben die Winkelhalbierenden für jedes Kugelpaar (10) immer dieselben.

Zu diesen Kugeln gelangt man auch durch die Frage: Wann gibt

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (II), Memoirs of the Faculty of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, p. 182 (1933).

es zu einem Winkel φ nur eine Kugel durch \mathfrak{K} , die $\bar{\mathfrak{K}}$ unter diesem schneidet?

In diesem Fall muss in (9) entweder ρ_1 oder ρ_2 verschwinden, und es ergeben sich die ausgezeichneten Winkelwerte

$$(11) \quad \cos^2 \varphi_1 = T^{11} \quad \text{und} \quad \cos^2 \varphi_2 = T^{22}.$$

Aus (11) erhält man mit Hilfe von

$$K = \frac{T}{A}; \quad H = \frac{1}{2} T^{\alpha}_{\alpha} \quad \text{und (5)}$$

$$K = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2; \quad H = \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2).$$

Damit ist eine geometrische Deutung der Invarianten zweier Kreise gefunden.

Die ganz analogen Verhältnisse finden wir natürlich auch beim Büschel $\bar{\mathfrak{K}}^{\lambda}$.

Wir erhalten wieder zwei invariante Winkelhalbierende. Da K und H in den beiden Kreisen symmetrisch sind, müssen wir wieder auf dieselben Winkel φ_1, φ_2 geführt werden. Die beiden gefundenen Paare von orthogonalen Kugeln, die von VESSIOT entdeckt worden sind, wollen wir die Hauptkugeln des Kreispaares nennen.

Aus

$$T^{\alpha\beta} = \bar{A}_{\lambda\mu} S^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu} = S^{\alpha}_{\lambda} S^{\beta\lambda}$$

und aus (5) erhalten wir

$$(12) \quad T^{12} = S^{11} S^{21} + S^{12} S^{22} = 0$$

ebenfalls

$$(13) \quad \bar{T}^{12} = S^{11} S^{12} + S^{21} S^{22} = 0.$$

Aus (12) und (13) folgt aber:

$$\begin{cases} (S^{11})^2 = (S^{22})^2 \\ (S^{12})^2 = (S^{21})^2. \end{cases}$$

(Entweder das Erstere oder das Letztere muß hier gelten).

Daraus werde aber folgen :

$$T^{11}=T^{22}, \quad \bar{T}^{11}=\bar{T}^{22},$$

d.h. wir hatten aber gerade den ausgeschlossenen Fall (4) (7).

Oder es muss eine der folgenden Gleichungspaare gelten :

$$(14) \quad \begin{cases} S^{12}=0 \\ S^{21}=0 \end{cases}$$

oder

$$(15) \quad \begin{cases} S^{11}=0 \\ S^{22}=0. \end{cases}$$

Weil bei der Vertauschung von \bar{x}^I mit \bar{x}^{II} die rechten Gleichungen sich mit den linken vertauschen, können wir uns, ohne einen Fall ausser Acht zu lassen, auf die Gleichungen links beschränken.

Daraus folgt aber dann

$$(16) \quad \begin{cases} T^{11}=\cos^2 \varphi_1=(S^{11})^2 \\ T^{22}=\cos^2 \varphi_2=(S^{22})^2 \end{cases}$$

Also ist nach (14) jede der Hauptkugeln durch \mathfrak{K} zu einer der Hauptkugeln durch \mathfrak{K} senkrecht, mit der andern aber bildet sie nach (16) einen der bereits definierten Winkel φ_1 oder φ_2 .

Die Möbiusgeometrie zwei sich nicht schneidender Kreise ist gleichbedeutend mit der nichteuklidischen Geometrie zweier Geraden, denn solche zwei Kreise haben eine gemeinsame orthogonale Kugel. Betrachten wir diese Kugel als die „absolute Kugel“, die wir im MÖBIUS Raum adjungieren, um zur nichteuklidischen Geometrie zu gelangen, so werden die zu ihr orthogonalen Kreise \mathfrak{K} und $\bar{\mathfrak{K}}$ nichteuklidische Geraden.

(11)

Wenn wir ein Paar von Punkten ($x^I x^{II}$), wobei x^a [$a=I, II$] zwei Kreise im R_2 sind, betrachten⁽¹⁾ und

(1) COOLIDGE, J. L.: The Geometry of the Komplex Domain, Oxford, p. 32 (1924).

$$(1) \quad \frac{\begin{vmatrix} \xi & \eta & \cdot & \delta & t \\ \xi & t & \cdot & \delta & \eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \xi \\ \eta & \eta \\ \delta & \delta \\ t & t \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}} = (\xi \delta, \eta t)$$

das Doppelverhältnis von vier Kreisen ξ, η, δ, t im R_2 nennen, dann folgt der

Satz: (1) ist invariant für Büscheltransformationen

$$(2) \quad \begin{cases} \rho \xi_1 = A_{11} \xi'_1 + A_{12} \xi'_2, \\ \rho \xi_2 = A_{21} \xi'_1 + A_{22} \xi'_2, \end{cases} \quad |A_{ij}| \neq 0,$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma \xi'_1 = -A_{22} \xi_1 + A_{12} \xi_2, \\ \sigma \xi'_2 = A_{21} \xi_1 - A_{11} \xi_2, \end{cases}$$

wobei A_{ij} Konstanten und ρ, σ Proportionalitätsfaktoren sind.

Aus unserer Definition (1) ergibt sich der ähnliche Satz in COOLIDGES Buch.⁽¹⁾

(12)

Es gibt ∞^6 Kreise im MÖBIUS Raum.

Ein Kreis \mathfrak{K} im R_3 kann als ein Schnitt zweier Kugeln \mathfrak{K}^a [$a=I, II$] festgelegt werden.

Alle Kugeln \mathfrak{K} in R , die sich linear aus den \mathfrak{K}^a kombinieren lassen, gehen durch denselben Kreis \mathfrak{K} .

Wir können daher auch zwei neue Kugeln

$$(1) \quad \mathfrak{K}^* = \sum_{\beta=1}^n c_{\beta}^* \mathfrak{K}^{\beta} \quad [a=I, II]$$

als Linearkombinationen der \mathfrak{K}^a mit Koeffizienten c_{β}^* , deren Determinante $|c_{\beta}^*| \neq 0$ sein muß, einführen, wenn \mathfrak{K}^I und \mathfrak{K}^{II} nicht proportional

(1) l. c. (1).

werden sollen, und dann ebensogut durch die ξ^* unsern Kreis darstellen.

Betrachten wir eine ganz bestimmte Kugel \mathfrak{z} in dem Büschel durch \mathfrak{K} in bestimmter Normierung, so muß sie sich einmal als Linearkombination $\rho_\alpha \xi^*$ in dem ξ , dann aber auch als eine solche $\xi^* \xi^*$ in den transformierten Größen schreiben lassen.⁽¹⁾

Da \mathfrak{z} als eine geometrisch fest bestimmte Kugel von den Büscheltransformationen nicht abhängt, so muß sie in den beiden Darstellungen dieselben Koordinaten haben, also

$$\mathfrak{z} = \rho_\alpha \xi^* = \rho_\alpha^* \xi^*.$$

Setzt man ξ^* aus (1) ein, so erhält man

$$(2) \quad \rho_\alpha = c_\alpha^\beta \rho_\beta^*.$$

Die ρ_α bilden also einen kovarianten Vektor.

Es seien zwei Kreise \mathfrak{K} , $\bar{\mathfrak{K}}$ im R_n .

Ist

$$\hat{\eta} = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{K} mit

$$(3) \quad \hat{\eta} \hat{\eta} = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muß

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta T^{\alpha\beta}$$

sein, wobei φ den Winkel zwischen η und $\bar{\eta}$ bedeutet.

Wir betrachten hier nur eine binäre quadratische Form (4) und setzen

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) = T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2,$$

deren Koeffizienten T^{11} , T^{12} , T^{22} ganz und rational sein sollen. Dann geht sie durch die Substitution $\begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & v \end{pmatrix}$, d.h. dadurch, dass man, unter x , λ , μ , v gegebene Konstanten verstehend,

$$\rho_1 = x \rho_1 + \lambda \bar{\rho}_2,$$

(1) BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Berlin (1929), S. 262.

$$\rho_{II} = \mu \bar{\rho}_I + v \bar{\rho}$$

setzt, in eine im allgemeinen von ihr verschiedene Form⁽¹⁾

$$(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22}) = \bar{T}^{11} \bar{\rho}_I + 2 \bar{T}^{12} \bar{\rho}_I \bar{\rho}_{II} + \bar{T}^{22} \bar{\rho}_{II}^2$$

über.

Zwischen den Koeffizienten der transformierten Form $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$ und denen der ursprünglichen Form (T^{11}, T^{12}, T^{22}) bestehen die Beziehungen

$$(5) \quad \begin{cases} T^{11} = \bar{T}^{11} x^2 + 2 \bar{T}^{12} x \mu + \bar{T}^{22} \mu^2 \\ T^{12} = \bar{T}^{11} x \lambda + \bar{T}^{12} (x v + \lambda \mu) + \bar{T}^{22} \mu v \\ T^{22} = \bar{T}^{11} \lambda^2 + 2 \bar{T}^{12} \lambda v + \bar{T}^{22} v^2 \end{cases}$$

Die Tatsache, dass (T^{11}, T^{12}, T^{22}) mittels der Substitution $\begin{pmatrix} x, \lambda \\ \mu, v \end{pmatrix}$ in $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$ übergeführt wird, sei durch die Gleichung

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} x, \lambda \\ \mu, v \end{pmatrix} = (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$$

ausgedrückt.⁽²⁾

Dabei ist stets angenommen, dass der Modul der Substitution, d. i. der Ausdruck

$$\Delta \equiv x v - \lambda \mu$$

von Null verschieden sei

Die Substitution $\begin{pmatrix} x, \lambda \\ \mu, v \end{pmatrix}$ selbst heisst eigentlich oder uneigentlich, je nachdem Δ positiv oder negativ ist.⁽³⁾

Ist insbesondere $\Delta = 1$, so heisst die Substitution $\begin{pmatrix} x, \lambda \\ \mu, v \end{pmatrix}$ unimodular

- (1) NAKASIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (II), Tôhoku Math. Journ. Vol. 31 p. 44.
- (2) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (III), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 7 (1933) S. 249.
- (3) GAUSS, Disquisitiones arithmeticae, Art. 157.

und die beiden Formen (T^{11}, T^{12}, T^{22}) und $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$ sind in diesem Falle eigentlich äquivalent.

Im folgenden ist mit Äquivalenz schlechthin stets die eigentliche gemeint.

Die Äquivalenz der Formen (T^{11}, T^{12}, T^{22}) und $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$ wird durch die Form

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) \sim (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$$

angezeigt.

Der Satz über die Transformation ist

$$1. \quad (T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} x, & \lambda \\ \mu, & v \end{pmatrix} = (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22});$$

ebenso

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} -x, & -\lambda \\ -\mu, & -v \end{pmatrix} = (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$$

2. Neben

$$(T^{11}, T^{12}, T^{22}) \begin{pmatrix} x, & \lambda \\ \mu, & v \end{pmatrix} = (\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$$

ist stets

$$(-T^{11}, -T^{12}, -T^{22}) \begin{pmatrix} -x, & \lambda \\ \mu, & -v \end{pmatrix} = (-\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, -\bar{T}^{22})$$

3. Ist die (T^{11}, T^{12}, T^{22}) äquivalent mit $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$, so ist auch $(-T^{11}, T^{12}, -T^{22})$ äquivalent mit $(-\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, -\bar{T}^{22})$.

4. Wenn die Form (T^{11}, T^{12}, T^{22}) durch die unimodulare Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \beta = 1),$$

deren dritter Koeffizient 1 ist, in die äquivalente Form $(\bar{T}^{11}, \bar{T}^{12}, \bar{T}^{22})$ übergeht, so gibt es stets eine Substitution S' von der nämlichen Gestalt

wie S, durch welche $(\bar{T}^1, \bar{T}^2, \bar{T}^3)$ wieder in (T^1, T^2, T^3) übergeführt wird, und zwar ist

$$S' = \begin{pmatrix} -\delta, & \beta \\ 1, & -\alpha \end{pmatrix}$$

eine solche Substitution.

(13)

$$\hat{\eta} = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

ist eine normierte Kugel im R_i durch den Kreis \mathfrak{K} in R_i mit

$$\eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muß

$$\cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta}.$$

Unter dem Produkte

$$(1) \quad C = A B$$

der beiden bilinearen Formen von 2 Variabelnpaaren x und y

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \equiv \sum A_{ik} x_i y_k,$$

$$B = \sum b_{ik} x_i y_k \equiv \sum T_{ik} x_i y_k,$$

werde der Ausdruck

$$C = \sum_i \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} = \sum c_{ik} x_i y_k,$$

verstanden, so dass

$$(2) \quad c_{ik} = \sum a_{il} b_{lk}$$

$$\text{für } i, k = 1, 2$$

wird.

Bei dieser Definition wird die Multiplikation assoziativ und distributiv, im allgemeinen dagegen nicht kommutativ.

Die Determinante der Koeffizienten des Produktes C wird nach (2) gleich dem Produkte der Determinanten der Faktoren A und B.

Bezeichnet man die Determinante der Koeffizienten c_{ik} einer Form C allgemein mit $|C|$, so zieht demnach die Gleichung (1) auch die folgende

$$|C| = |A| |B|$$

nach sich.

Zwei Formen A und B heissen vertauschbar, wenn ihr Produkt kommutativ ist, d.h. wenn

$$AB = BA \text{ ist,}$$

welche Gleichung also die 2^e in den Koeffizienten von A und B in den linearen Gleichungen

$$\sum a_{ii} b_{ik} = \sum b_{ii} a_{ik},$$

$$i, k = 1, 2$$

repräsentiert.

(14)

Die zu zwei Werten k und x von $d\tau:dt$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen vom Punkte (t, τ) der ersten Kreisfläche aus bilden einen Winkel α miteinander, für den

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_i \theta_\tau)(k+x) + (\theta_\tau \theta_\tau)kx}{\sqrt{\{(\theta_i \theta_i) + 2(\theta_i \theta_\tau)k + (\theta_\tau \theta_\tau)k^2\} \{(\theta_i \theta_i) + 2(\theta_i \theta_\tau)x + (\theta_\tau \theta_\tau)x^2\}}}$$

ist.

Die entsprechenden Richtungen im Punkte (t, τ) der zweiten Kreisfläche bilden einen Winkel $\bar{\alpha}$ miteinander, für den

$$(2) \quad \cos \bar{\alpha} = \frac{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) + (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)(k+x) + (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau)kx}{\sqrt{\{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) + 2(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)k + (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau)k^2\} \{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i) + 2(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)x + (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau)x^2\}}}$$

ist.

Werden k und x so gewählt, dass die zugehörigen Richtungen auf der ersten Kreisfläche zueinander senkrecht sind, so werden die zugehörigen Richtungen auf der zweiten Kreisfläche im allgemeinen nicht zueinander senkrecht sein.

Einem rechten Winkel auf der ersten Kreisfläche entspricht vielmehr nur dann ein rechter Winkel auf der zweiten, wenn die Bestimmungsstücke k und x der Schenkel so gewählt werden, dass gleichzeitig

$$\cos \alpha = 0$$

und

$$\cos \bar{\alpha} = 0,$$

also

$$(3) \quad \begin{cases} (\theta_i, \theta_i) + (\theta_i, \theta_\tau) (k+x) + (\theta_\tau, \theta_\tau) k x = 0, \\ (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i) + (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_\tau) (k+x) + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) k x = 0 \end{cases}$$

ist.

Es müssen also k und x so gewählt werden, dass ihre Summe und ihr Produkt die Werte haben :

$$(4) \quad \begin{aligned} k+x &= \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i) - (\theta_i, \theta_i) (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau)}{(\theta_i, \theta_\tau) (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) - (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i) (\theta_\tau, \theta_\tau)}, \\ kx &= \frac{(\theta_i, \theta_i) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i)}{(\theta_i, \theta_\tau) (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) - (\theta_\tau, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i)}, \end{aligned}$$

d.h. k und x sind die Wurzeln der in k quadratischen Gleichung :

$$(5) \quad \begin{aligned} &\{(\theta_i, \theta_i) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i)\} - \{(\theta_\tau, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i) - (\theta_i, \theta_i) (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\} k \\ &+ \{(\theta_i, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_\tau) - (\theta_\tau, \theta_\tau) (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i)\} k^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(6) \quad \begin{vmatrix} k^2 & (\theta_i, \theta_i) & (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i) \\ -k & (\theta_i, \theta_\tau) & (\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_\tau) \\ 1 & (\theta_\tau, \theta_\tau) & (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (6) ergeben sich die folgenden Sätze :

Satz 1 : Die beiden Scharen von Minimalkurven der einen Kreisfläche

bilden sich als die beiden Scharen von Minimalkurven der anderen Kreisfläche ab.

Dann ist die Abbildung konform, und jedem Orthogonalsystem auf der einen Kreisfläche entspricht ein Orthogonalsystem auf der anderen Kreisfläche.

Satz 2: Nur eine Schar von Minimalkurven der einen Kreisfläche bildet sich als eine Schar von Minimalkurven der anderen Kreisfläche ab.

Ausser diesem als Ausartung eines Orthogonalsystems aufzufassenden System gibt es alsdann kein Orthogonalsystem auf der einen Kreisfläche, dem auf der anderen Kreisfläche wieder ein Orthogonalsystem entspräche.

Bei reeller Abbildung tritt dieser Fall nie ein.

Satz 3: Keine der beiden Scharen von Minimalkurven der einen Kreisfläche bildet sich als Schar von Minimalkurven der anderen Kreisfläche ab.

Als dann gibt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Kreisfläche, dem auf der anderen Kreisfläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht.

Ist die Abbildung reell, so sind es auch die beiden Orthogonalsysteme.

(15)

Geben wir einen Kreis ξ als Funktion eines Parameters t , so ist in der Ebene eine Kreisschar bestimmt.

Sind v , \bar{v} die beiden umhüllenden Kreisen von ξ mit dem Nachbarkreis, die beiden Enveloppenpunkte, so gilt:

$$(1) \quad \begin{cases} (v v) = 1, & (v \xi) = (v \xi') = 0, \\ (\bar{v} \bar{v}) = 1, & (\bar{v} \xi) = (\bar{v} \xi') = 0. \end{cases}$$

v und \bar{v} lassen sich als die beiden Lösungen des Systems (1) von einer quadratischen und zwei linearen Gleichungen bis auf den Homogenitätsfaktor berechnen.

Wir denken uns in dem Fall, daß $(\mathfrak{b} \bar{\mathfrak{b}}) = 0$ wird, d.h. \mathfrak{b} senkrecht zu $\bar{\mathfrak{b}}$ ist.

Wir haben jetzt folgende Tabelle skalarer Produkte zwischen ξ , ξ' , \mathfrak{b} und $\bar{\mathfrak{b}}$:⁽¹⁾

(2)

—	ξ	ξ'	\mathfrak{b}	$\bar{\mathfrak{b}}$
ξ	1	0	0	0
ξ'	0	1	0	0
\mathfrak{b}	0	0	1	0
$\bar{\mathfrak{b}}$	0	0	0	1

Aus dem Multiplikationssatz der Determinanten folgt nur.

$$(3) \quad |\xi, \xi', \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}|^2 = 1.$$

Dann erhalten wir die Tabelle skalarer Produkte:

(4)

—	ξ	ξ'	\mathfrak{b}	$\bar{\mathfrak{b}}$
ξ''	-1	0	c	\bar{c}
\mathfrak{b}'	0	$-c$	0	0
$\bar{\mathfrak{b}}'$	0	$-\bar{c}$	0	0

so ergibt sich

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1925) S. 127.

$$(5) \quad \begin{cases} \xi'' = -\xi + \bar{c}b + c\bar{b}, \\ b' = -c\xi', \\ \bar{b}' = -\bar{c}\xi'. \end{cases}$$

(16)

$$(1) \quad \xi = \xi(u^1, u^2)$$

im R_3 , wobei u^1, u^2 zwei Parameter sind.⁽¹⁾

Nun setzen wir⁽¹⁾

$$(2) \quad | \xi \xi_1 \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 | \equiv G_{ij} du^i du^j,$$

nach der Bezeichnung des RICCI-KALKÜLS an.

Die Grössen G_{ij} werden dann folgendermassen dargestellt:

$$(4) \quad \begin{cases} G_{11} = | \xi \xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{12} |, \\ G_{12} = \frac{1}{2} | \xi \xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{22} |, \\ G_{22} = | \xi \xi_1 \xi_2 \xi_{12} \xi_{22} |. \end{cases}$$

Bei beliebiger Transformation des Parametersystems

$$(5) \quad u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

können wir sehr leicht die Beziehung

$$(6) \quad G_{ij} du^i dv^j = \left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \right)^2 \bar{G}_{ij} d\bar{u}^i d\bar{u}^j$$

ausführen, wenn wir mit \bar{G}_{ij} das durch Ersetzung von \bar{u}^i anstatt u^i erhaltene G_{ij} bezeichnen.

Andererseits erhält man

$$(7) \quad G_{ki} = \Delta^j \bar{G}_{ij} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^k} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i},$$

wobei

(1) THOMSEN, G.: Grundlagen der konformen Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. III (1924) S. 37.

$$(8) \quad \Delta = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}$$

ist.

Daraus folgt

$$(9) \quad G_{11} G_{22} - G_{12}^2 = \Delta^6 (\bar{G}_{11} \bar{G}_{22} - \bar{G}_{12}^2).$$

Nach (6) und (9) soll der Differentialausdruck

$$(10) \quad g_{ij} du^i du^j = \frac{|\xi_1 \xi_2 d\xi_1 d\xi_2|}{\sqrt[3]{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}} = \frac{G_{ij} du^i du^j}{\sqrt[3]{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}}$$

von der Wahl des Parametersystems unabhängig sein.

Dann sind

$$(11) \quad \begin{cases} g_{11} = \frac{1}{\sqrt[3]{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}} |\xi_1 \xi_2 \xi_1 \xi_2|, \\ g_{12} = \frac{1}{2\sqrt[3]{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}} |\xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{22}|, \\ g_{22} = \frac{1}{\sqrt[3]{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}} |\xi_1 \xi_2 \xi_{12} \xi_{21}|. \end{cases}$$

Wir setzen nun voraus, dass die Determinante

$$(12) \quad G \equiv g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (G_{11} G_{22} - G_{12}^2)^{\frac{1}{3}} > 0$$

ist, da sich die Theorie in ähnlicher Weise entwickeln kann, wenn $G > 0$ ist.

Es genügt, g_{ij} als kovarianten Tensor zweiter Stufe anzusehen. Infolge der Voraussetzung (12) existiert dann der kontravariante Tensor g^{ij} so, dass

$$(13) \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \quad \text{ist,}$$

d.h.

$$(14) \quad \begin{cases} g^{11} = \frac{g_{22}}{G} = \frac{1}{\sqrt{(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)^2}} |\xi \xi_1 \xi_2 \xi_{12} \xi_{22}|, \\ g^{12} = -\frac{g_{12}}{G} = \frac{-1}{2\sqrt{(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)^2}} |\xi \xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{22}|, \\ g^{22} = \frac{g_{11}}{G} = \frac{1}{\sqrt{(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)^2}} |\xi \xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{12}|. \end{cases}$$

Betrachten wir

$$(15) \quad g^{ik} \xi_{jk} + 2p^i \xi_i + q \xi = 0,$$

dann ergibt sich:

$$(16) \quad \begin{cases} p^1 = \frac{1}{2G^2} |\xi \xi_2 \xi_{11} \xi_{12} \xi_{22}|, \\ p^2 = \frac{-1}{2G^2} |\xi \xi_1 \xi_{11} \xi_{12} \xi_{22}|, \\ q = \frac{-2}{G^2} |\xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{12} \xi_{22}|. \end{cases}$$

Bei der Änderung des Proportionalitätsfaktors:

$$(17) \quad \xi = \lambda(u^1, u^2) \xi^*,$$

wird die lineare partielle Differentialgleichung (15) in die Form

$$(18) \quad g^{ik*} \xi_{jk}^* + 2p^{i*} \xi_i^* + q^* \xi^* = 0$$

gebracht, wobei

$$(19) \quad \begin{cases} g^{ik} = \lambda^{-\frac{5}{3}} g^{ik*}, \\ p^i = \lambda^{-\frac{5}{3}} \left(p^{i*} - \frac{\lambda_i}{\lambda} g^{k i*} \right), \\ q = \lambda^{-\frac{5}{3}} \left(q^* - 2 \frac{\lambda_2}{\lambda} p^{2*} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda} g^{12*} \right) \end{cases}$$

sind.

Der Ausdruck

$$(20) \quad I = -q + p_{,k}^k + g_{jk} p^j p^k$$

ist bei der Transformation (17) eine uneigentliche Differentialinvariante. ξ seien die normierten Koordinaten, und wir definieren jetzt den Vektor

$$(21) \quad p = p^{jk} \xi_{,k} = -2p^i \xi_{,i} - q \xi,$$

der von der Wahl des Parametersystems und zwar von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, und mit seiner Hilfe definieren wir weiter die drei Vektoren

$$(22) \quad \eta_{rs} = \xi_{rs} - \frac{1}{2} g_{rs} p.$$

Der durch die Vektoren η_{rs} ausgespannte Vektorraum ist von der Wahl des Parametersystems unabhängig.

(17)

Vorausgesetzt, daß

$$(\theta_i \theta_i)_1 : (\theta_i \theta_i)_2 : (\theta_i \theta_i)_3 = (\theta_i \theta_i)_1 : (\theta_i \theta_i)_2 : (\theta_i \theta_i)_3$$

auf zwei Kreisflächen S_1 und S_2 nicht existiert, dann existiert ein und nur ein orthogonales Kurvensystem auf S_1 , mit dem ein und nur ein orthogonales Kurvensystem auf S_2 korrespondiert, und seine Gleichung ist

$$\begin{aligned} & [(\theta_i \theta_i)_1 (\theta_i \theta_i)_2 - (\theta_i \theta_i)_2 (\theta_i \theta_i)_1] dt^2 \\ & + [(\theta_i \theta_i)_2 (\theta_i \theta_i)_1 - (\theta_i \theta_i)_1 (\theta_i \theta_i)_2] dt d\tau \\ & + [(\theta_i \theta_i)_1 (\theta_i \theta_i)_2 - (\theta_i \theta_i)_2 (\theta_i \theta_i)_1] d\tau^2 = 0, \end{aligned}$$

wobei die Punkte (t, τ) auf S_1 mit den Punkten (t, τ) auf S_2 korrespondieren.

(18)

Es sei $\chi(u, v)$ ein zweiparametrisches Kugelsystem in R_n -Raum oder eine Fläche⁽¹⁾ in der R_n .

(1) BLASCHKE, W.: Über die Geometrie von LAGUERRE, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Band (1926) S. 204.

Die Schar der Berührungskugeln des Hüllgebildes an der Stelle wird $\eta = \xi + \lambda v$ dargestellt, wobei v das sphärische Bild der Stellung des Hüllgebildes ist.

Wenn

$$\lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0$$

besteht,⁽¹⁾ dann folgt

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \alpha_1 + \beta_1 - 1} v + \text{const.} \\ v &= e \\ & -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \alpha_1 + \beta_1 - 1} v + \text{const.} \\ \eta &= \xi + \lambda e \end{aligned}$$

(19)

Wir betrachten nun die Funktionen des Kreises im R_3

$$(x^\alpha)' = \varphi^\alpha(x^\beta), \quad (\alpha, \beta = \text{I, II}),$$

und setzen

$$\eta'_\alpha = \eta_\beta \frac{\partial (x^\alpha)'}{\partial x^\beta}; \quad (v^\alpha)' = v^\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial (x^\alpha)'},$$

dann folgt

$$\xi_\alpha v^\alpha = \eta'_\alpha (v')^\alpha.$$

Bei der Verschiebung der x^α in der Richtung $\hat{\xi}_\alpha$ gehen aus den η_α , v^α andere Systeme $\eta_\alpha + \delta \xi \eta_\alpha$, $v^\alpha + \delta \xi v^\alpha$ hervor.

Für die Änderungen $\delta \xi \eta_\alpha$, $\delta \xi v^\alpha$ der η_α , v^α bei der Verschiebung der x^α in der Richtung $\hat{\xi}_\alpha$ erhalten wir bei der Transformation die Transformationsformeln

$$\delta \xi' \eta'_\alpha = \frac{\partial (x^\alpha)'}{\partial x^\beta} \delta \xi \eta_\beta + \frac{\partial^2 (x^\alpha)'}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \xi_\gamma \eta_\beta$$

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tohoku Math. Journ. Vol. 30, (1928) p. 142.

$$\partial \xi' (v^s)' = \frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \partial \xi v^s + - \frac{\partial^2 x^s}{\partial (x^s)' \partial (x^r)'} \xi_r' v^s.$$

Diese Formeln zeigen bereits, dass die einzelnen $\partial \xi \eta_a$, $\partial \xi v^s$ nur bei linearer Transformation der x^s invariant sind, aber nicht mehr bei höheren Transformationen, und auch dass sich dagegen die Differenzen verschiedener $\partial \xi \eta_a$, $\partial \xi v^s$ transformieren wie die η_a , v^s selbst.

Es muss dann möglich sein, neue Variable $(x^s)'$ so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x^s)'}{\partial x^s} \partial \xi \eta_s &= - \frac{\partial^2 (x^s)'}{\partial x^s \partial x^r} \xi_r' \eta_s; \\ \frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \partial \xi v^s &= - \frac{\partial^2 x^s}{\partial (x^s)' \partial (x^r)'} \frac{\partial (x^r)'}{\partial x^r} \xi_r' v^s. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \frac{\partial (x^s)'}{\partial x^r} &= \epsilon^{sr} = \begin{cases} 1 & \text{für } s=r \\ 0 & \text{,, } s \neq r \end{cases} \\ \partial x^s \left(\frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \frac{\partial (x^s)'}{\partial x^r} \right) &= \frac{\partial^2 x^s}{\partial (x^s)' \partial (x^r)'} \frac{\partial (x^r)'}{\partial x^s} \frac{\partial (x^s)'}{\partial x^r} + \\ &+ \frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \frac{\partial^2 (x^s)'}{\partial x^r \partial x^s} = 0 \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned} \partial \xi \eta_a &= - \frac{\partial x^s}{\partial (x^s)'} \frac{\partial^2 (x^s)'}{\partial x^r \partial x^s} \xi_s' \eta_r; \\ \partial \xi v^s &= - \frac{\partial x^r}{\partial (x^s)'} \frac{\partial^2 (x^s)'}{\partial x^s \partial x^r} \xi_r' v^r. \end{aligned}$$

Somit können wir setzen

$$\partial \xi \eta_a = \alpha_a^{sr} \xi_s' \eta_r \quad (\alpha_a^{sr} = \alpha_a^{rs})$$

und haben dann

$$\partial \xi v^s = - \alpha_r^{sa} \xi_s' v^r.$$

Aus

$$a_s^{\sigma\tau} = -\frac{\partial x^s}{\partial (x^\sigma)'} - \frac{\partial^2 (x^\sigma)'}{\partial x^\tau \partial x^s}$$

folgt dann für die Bestimmung der $(x^\sigma)'$ das System von Differentialgleichungen

$$a_s^{\sigma\tau} \frac{\partial x^s}{\partial (x^\sigma)'} = -\frac{\partial^2 (x^\sigma)'}{\partial x^\tau \partial x^s}.$$

Die Bedingungen für die Integrierbarkeit dieses Systems lauten

$$\frac{\partial a_i^{\mu\sigma}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial a_i^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} + a_\mu^{\sigma\tau} a_i^{\mu\delta} - a_\mu^{\delta\sigma} a_i^{\mu\tau} = 0.$$

(20)

Im folgenden behandeln wir die Aufgabe:

Drei Kreise mit Vektoren α , \mathfrak{B} , \mathfrak{L} im R_2 seien gegeben, und wir wollen zwei skalare Grössen x und y so bestimmen, dass

$$\mathfrak{L} = \alpha x + \mathfrak{B} y$$

möglichst gut erfüllt werden soll, d.h., diese Kreise durch α und \mathfrak{B} möglichst dem Kreis \mathfrak{L} gleich werden.

In unserem Fall handle es sich darum, zwei skalare Grössen x und y so zu bestimmen, dass die vier Gleichungen

$$l_i = a_i x + b_i y \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

möglichst gut erfüllt werden, die nach dem Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen bekannt sind, wobei

$$a_i x + b_i y - l_i$$

die Lösungen der Komponenten des Vektors¹

$$\alpha x + \mathfrak{B} y - \mathfrak{L} \text{ sind.}$$

Man erhält so die Bedingungen

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Sem. der Hamb. Univ. Band IV (1925) S. 118.

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \mathfrak{L} = x \alpha^2 + y \alpha \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{B} \mathfrak{L} = x \alpha \mathfrak{B} + y \mathfrak{B}^2. \end{cases}$$

Diese sind nichts anders als die Normalgleichungen der Ausgleichsrechnung

$$(2) \quad \begin{cases} [a a] x + [a b] y = [a l], \\ [a b] x + [b b] y = [b l], \end{cases}$$

und zwar⁽¹⁾

$$\begin{aligned} [a a] &= a^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_4^2 \\ [a b] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \end{aligned} \quad \text{u. s. w.}$$

Aber

$$\begin{aligned} [a a] &= 1, \\ [b b] &= 1. \end{aligned}$$

Aus (1) folgen so die Beziehungen

$$(3) \quad \begin{cases} x + [a b] y = [a l], \\ [a b] x + y = [b l], \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen, von denen x und y bestimmt werden sollen.

(21)

Als eine unsrer geometrischen Anwendungen möchte ich hier eine dynamische Aufgabe behandeln.

Mit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2, u^3), \quad (\mathfrak{x} \mathfrak{x} = 0, u^1 = u, u^2 = v, u^3 = w)$$

bezeichnen wir den Flächenpunkt eines dreifachorthogonalen Flächensystems im konformen Raume derart, dass die Gleichungen

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.} \quad \text{und} \quad w = \text{const.}$$

(1) l. c. (I).

die drei Systeme von den aufeinander senkrecht stehenden Flächen darstellen.

Wählen wir auf den Schnittkurven der Flächen u, v, w die Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, dann ist

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x(u + \varepsilon, v, w), \\ \bar{x}_2 = x(u, v + \eta, w), \\ \bar{x}_3 = x(u, v, w + \zeta). \end{cases}$$

Wir nehmen drei Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ so wie

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x(u + \varepsilon, v + \eta, w), \\ \bar{x}_2 = x(u, v + \eta, w + \zeta), \\ \bar{x}_3 = x(u + \varepsilon, v, w + \zeta). \end{cases}$$

Ist ρ die Dichte des Körpers (Masse pro Volumeinheit) im Punkt $x(u, v, w)$, dann ist ρ eine Funktion von u, v, w .

Wenn jedes ρ in $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ gleich ist, dann folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \rho(u + \varepsilon, v + \eta, w) = \rho(u, v + \eta, w + \zeta) \\ \quad = \rho(u + \varepsilon, v, w + \zeta). \end{cases}$$

Durch die Reihenentwicklung erhält man die folgenden Gleichungen, in denen die Fussmarken die Differentiation nach u, v und w andeuten:

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \rho_{11} + \dots &= \eta \rho_2 + \frac{\eta^2}{2} \rho_{22} + \dots \\ &= \zeta \rho_3 + \frac{\zeta^2}{2} \rho_{33} + \dots, \\ \varepsilon \rho_1 + \eta \rho_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \rho_{11} + 2 \varepsilon \eta \rho_{12} + \eta^2 \rho_{22}) + \dots \\ &= \eta \rho_2 + \zeta \rho_3 + \frac{1}{2} (\eta^2 \rho_{22} + 2 \eta \zeta \rho_{23} + \zeta^2 \rho_{33}) + \dots \\ &= \zeta \rho_3 + \varepsilon \rho_1 + \frac{1}{2} (\zeta^2 \rho_{33} + 2 \zeta \varepsilon \rho_{31} + \varepsilon^2 \rho_{11}) + \dots \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\varepsilon \eta \rho_{12} = \eta \zeta \rho_{23} = \zeta \varepsilon \rho_{31}$$

und schliesslich

$$(4) \quad \rho_{12} : \rho_{23} : \rho_{31} = \rho_1 \rho_2 : \rho_2 \rho_3 : \rho_3 \rho_1.$$

Aus (4) kann man die Beziehung

$$\bar{\rho}(\rho) + \bar{u}(u) + \bar{v}(v) + \bar{w}(w) = 0$$

erhalten,⁽¹⁾ wo $\bar{\rho} = \psi(\rho)$ ist.

(22)

Es seien \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ drei Kreise im R_3 .

Ist $\mathfrak{y} = \rho_s \mathfrak{x}^s$ eine normierte Kugel im R_3 durch \mathfrak{R} , dann ergibt sich

$$(1) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2}, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = \frac{\bar{T}^{11} \bar{\rho}_1^2 + 2 \bar{T}^{12} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{T}^{22} \bar{\rho}_2^2}{\bar{A}^{11} \bar{\rho}_1^2 + 2 \bar{A}^{12} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{A}^{22} \bar{\rho}_2^2} \end{cases}$$

wobei

$$\varphi = \angle(\mathfrak{y} \mathfrak{R}) \quad \text{und} \quad \bar{\varphi} = \angle(\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{R}})$$

ist.

Aus (1) folgt ²⁾

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \bar{\varphi} \\ &= \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2} - \\ &\quad + \frac{\bar{T}^{11} \bar{\rho}_1^2 + 2 \bar{T}^{12} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{T}^{22} \bar{\rho}_2^2}{\bar{A}^{11} \bar{\rho}_1^2 + 2 \bar{A}^{12} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{A}^{22} \bar{\rho}_2^2} - 1. \end{aligned}$$

Wenn $\varphi = 0$ ist, dann ergibt sich

$$(2) \quad \mathfrak{y} = \rho_s(t) \mathfrak{x}^s$$

(1) LIERMANN, H.: Die SAUERSche Zerteilung des Raumes, Math. Zeitschrift Bd. 28 (1928) S. 38.

(2) Vergl. I. c. (1)

mit

$$(3) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha(t) \rho_\beta(t) = 0$$

wenn $\rho = \rho(t)$ ist.

Bezeichnen wir die Ableitung längs der Kugelschar (2) mit δ , so ist die dem η benachbart zu erzeugende Kugel durch

$$(4) \quad \eta + \frac{\delta \eta}{\delta t} \delta t = \sum_\alpha \left(\rho_\alpha + \frac{\delta \rho_\alpha}{\delta t} \delta t \right) \xi^\alpha$$

gegeben, wobei die folgende Bedingung

$$\sum_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \frac{\delta \rho_\beta}{\delta t} = 0$$

für $\frac{\delta \rho_\beta}{\delta t}$ erfüllt sein muß.

Wir wollen betrachten

$$(5) \quad \eta - \rho_\alpha \overset{\circ}{\xi}^\alpha + \bar{\rho}_\lambda \overset{\circ}{\xi}^\lambda,$$

wobei

$$T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0, \quad \bar{T}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta = 0, \quad \eta \eta = 0$$

ist.

Aus (5) folgt dann

$$\rho_\alpha \overset{\circ}{\xi}^\alpha \perp \bar{\rho}_\lambda \overset{\circ}{\xi}^\lambda.$$

Aus

$$(6) \quad \bar{\eta} = \rho_\alpha \overset{\circ}{\xi}^\alpha - \bar{\rho}_\lambda \overset{\circ}{\xi}^\lambda,$$

folgt

$$\eta \bar{\eta} = 0.$$

Wir wollen $\eta, \bar{\eta}$ konjugierte Punkte nennen.⁽¹⁾

(1) Vergl. NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. Fac. Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ. Vol. II (1929) p. 21.

(23)

Im Folgenden werden wiederholt die Invarianten der beiden quadratischen Formen

$$f_1 \equiv T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \quad f_2 \equiv A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2,$$

auftreten, und wir setzen daher zur Abkürzung

$$D_{11} \equiv T^{11} T^{22} - (T^{12})^2$$

Diskriminante von f_1 ,

$$D_{22} \equiv A^{11} A^{22} - (A^{12})^2$$

Diskriminante von f_2 ,

$$D_{12} \equiv T^{11} A^{22} + A^{11} T^{22} - 2 T^{12} A^{12}$$

Simultaninvariante beider Formen oder die zweite Ueberschiebung von f_1 über f_2 .

$$\vartheta_{12} \equiv \begin{vmatrix} T^{11} \rho_1 + T^{12} \rho_2 & T^{12} \rho_1 + T^{22} \rho_2 \\ A^{11} \rho_1 + A^{12} \rho_2 & A^{12} \rho_1 + A^{22} \rho_2 \end{vmatrix}$$

ϑ_{12} ist die Funktionaldeterminante der beiden Formen oder die erste Ueberschiebung von f_1 über f_2 .

$$R \equiv D_{12}^2 - 4 D_{11} D_{22}$$

Resultante von f_1 und f_2 .

Wenn $\cos^2 \varphi = k^2$, dann

$$f_1 - k^2 f_2 = 0.$$

Setzt man die Diskriminante dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die beiden Werten von $k(k_1, k_2)$ für die Doppelwurzeln von $\cos^2 \varphi = k^2$ durch die Gleichung

$$D_{22} k^2 - D_{12} k + D_{11} = 0,$$

oder

$$k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2 D_{22}}$$

Die Gleichung für die Doppelwurzeln selbst erhalten wir, indem wir bilden

$$(f_1 - k_1^2 f_2)(f_1 - k_2^2 f_2) = f_1^2 - (k_1 + k_2) f_1 f_2 + k_1 k_2 f_2^2 = 0,$$

oder

$$D_{22} f_1^2 - D_{12} f_1 f_2 + D_{11} f_2^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist⁽¹⁾ aber $-\delta_{12}^2$.

Die Doppelwurzeln sind also durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} T^{11} \rho_1 + T^{12} \rho_2 & T^{12} \rho_1 + T^{22} \rho_2 \\ A^{11} \rho_1 + A^{12} \rho_2 & A^{12} \rho_1 + A^{22} \rho_2 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt.

(24)

Es seien $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ irgend zwei Kurvenscharen auf einer Fläche.

Das Quadrat des Linienelements einer beliebigen Kurve auf der Fläche nehme, wenn das Netz (t, τ) als krummliniges Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, die Form

$$(1) \quad ds^2 = \lambda [(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2 \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)} \cos w dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2]$$

an, worin die Quadratwurzel positiv zu wählen ist, und w den Koordinatenwinkel bedeutet.

Die Kurve

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

sei die Halbierenden des Supplementwinkels zu w ; dann muß nach den bekannten Sätzen der Flächentheorie

$$\cot \frac{w}{2} = \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)} \sin w \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} :$$

$$\left[(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)} \cos w \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right]$$

sein.

(1) CLEBSCH: Theorie der binären algebraischen Formen, S. 59.

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (VI)

Sōji MATSUMURA

(1)

Die Gleichung der Kugel wird mit

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2x_2y - 2x_3z + 2x_4 = 0$$

bezeichnet, wobei x, y, z laufende Kartesische Koordinaten im R_3 und x_1, x_2, x_3, x_4 vier Konstanten sind.

Radii r von (1) ergibt

$$(2) \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4.$$

Für jeden Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) im R_4 besteht eine Kugel im R_3 .

Aus (2) folgt, dass die Kugel, wenn

$$(3) \quad x^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4 = 0$$

ist, zum Punkt wird.

Der Winkel θ zwischen zwei Kugeln (x_1, x_2, x_3, x_4) und (y_1, y_2, y_3, y_4) wird mit

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4 - y_4}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_4)}}$$

gegeben.

Aus (3) folgt speziell als die Bedingung für die Orthogonalität zweier Kugeln :

$$(5) \quad (x \ y) = 0$$

und als die für die Berührung :

$$(6) \quad (x \ x)(y \ y) - (x \ y)^2 = 0.$$

wobei

$$(7) \quad (\xi \eta) \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 - y_4$$

ist.

Die Kugeln

$$(8) \quad (\lambda x_1 + \mu y_1, \quad \lambda x_2 + \mu y_2, \quad \lambda x_3 + \mu y_3, \quad \lambda x_4 + \mu y_4)$$

bezeichnen eine Kugelbuschel, die durch den Schnitt zweier Kugeln (x_1, x_2, x, x_4) und (y_1, y_2, y, y_4) geht.

Die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 im R_4 mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 wird durch die Gleichung

$$(9) \quad S^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

bestimmt.

Aus (9) folgt, dass zwei Kugeln, wenn $S=0$ ist, zusammenfallen werden.

Man betrachte eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit F_2 in einem euklidischen Raume von vier Dimensionen R_4

$$x_1 = x_1(u^1, u^2), \quad x_2 = x_2(u^1, u^2),$$

$$x_3 = x_3(u^1, u^2), \quad x_4 = x_4(u^1, u^2),$$

die wir mit dem Vektor ξ bezeichnen und bilde daraus

$$ds^2 = \sum dx^2 = (d\xi, d\xi) = g_{ik} du^i du^k.$$

Dies ist die KOMMERELLSche erste Fundamentalform, die notwendig positivdefinite Form ist.

Die KOMMERELLSche zweite Differentialform lautet

$$h_{ik} du^i du^k$$

wobei

$$h_{11} = (\xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{12}),$$

$$2 h_{12} = (\xi_1 \xi_2 \xi_{11} \xi_{22}),$$

$$h_{22} = (\xi_1 \xi_2 \xi_{12} \xi_{22})$$

ist.

Die dritte Differentialform von KOMMERELL ist

$$P_{iklm} du^i du^k du^l du^m.$$

Wenn die drei KOMMERELLSchen Fundamentalformen, welche den gewissen Bedingungen genügen, gegeben sind, so ist nach KUBOTA⁽¹⁾ die F_2 in Räume R_4 bis auf die Bewegung eindeutig bestimmbar, d.h., sie wird eine Kugel bestimmen

(2)

$\cos^2 \varphi$ zu minimalisieren ist gleich zu minimalisieren

$$(1) \quad A(\rho_I, \rho_{II}) - \lambda B(\rho_I, \rho_{II}),$$

wobei λ ein Parameter⁽²⁾ und

$$(2) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = A(\rho_I, \rho_{II}) = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \\ 1 = B(\rho_I, \rho_{II}) = A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \end{cases}$$

ist.

Setzen wir

$$I = A - \lambda B,$$

dann folgt aus

$$\frac{\partial I}{\partial \rho_I} = 0$$

$$(3) \quad (T^{11} - \lambda A^{11}) \rho_I + (T^{12} - \lambda A^{12}) \rho_{II} = 0.$$

Aus

$$\frac{\partial I}{\partial \rho_{II}} = 0$$

-
- (1) KUBOTA, T.: Fundamentalsatz in der Differentialgeometrie der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit im Raume von vier Dimensionen und seine Anwendung auf die LAGUERRE-Geometrie. The Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ., Vol. Vol. XVII p. 1241.
- (2) RICHARDSON, R. G. D : A new Method in the equivalence of Pairs of bilinear Forms, Transactions of the American Math. Society 26 (1924) p. 451.

folgt

$$(4) \quad (T^{12} - \lambda A^{12}) \rho_I + (T^{22} - \lambda A^{22}) \rho_{II} = 0.$$

(3) hat eine Lösung, wenn und nur wenn λ eine charakteristische Zahl, d.h.,

$$|T^{ij} - \lambda A^{ij}| = 0$$

ist.

Eine Lösung von

$$\cos^2 \varphi = \text{minimum}$$

liegt zwischen den Lösungen von

$$(T^{1i} - \lambda_i A^{1i}) \rho_I + (T^{i2} - \lambda_i A^{i2}) \rho_{II} = 0, \quad i=1, 2,$$

wobei

$$(5) \quad |T^{ij} - \lambda_i A^{ij}| = 0$$

ist.

Der Minimumwert λ_1 von λ_i ergibt den Minimumwert von $\cos^2 \varphi$, wobei (5) besteht.

(3)

Man kann die folgenden Sätze⁽¹⁾ beweisen.

Satz 1. Die Kugeln sind die einzigen Eiflächen, für die die Punkte

$$p = \xi + (R_1 R_2) \zeta$$

in Gegenpunkten zusammenfallen.

Satz 2. Die Kugeln sind die einzigen Eiflächen mit dem Mittelpunkt 0, für die die Punkte

$$p = \xi + H^2 \zeta$$

in Gegenpunkten zusammenfallen.⁽²⁾

(1) MATSUMURA, S.: Über konvex-geschlossene Flächen, Tohoku Math. Journ. Vol. 36 p. 192 und p. 193. Vergl. S. 300.

(2) MATSUMURA, S.: Nachtrag zu der Arbeit über konvex-geschlossene Flächen, Tohoku Math. Journ., Bd. 36, S. 192 193, die jetzt unter der Presse in Tohoku Math. Journal ist.

Auf dieselbe Weise führen wir auch die Ansätze zu Kugeln :

$$p = \xi + \frac{R_1 + R_2}{2} \xi,$$

$$p = \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \xi, \quad \text{u. s. w.}$$

(4)

Wir wollen drei Systeme von zwei Kurvenpaaren

$$(1) \quad f_0(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0, \quad f_1(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0, \quad f_2(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0$$

mit

$$(2) \quad f \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

betrachten, und zwei Kurvenpaare durch Schnittpunkte von (1) bezeichnen.

Wenn (2) Multiplepunkte hat, dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^2} = 0$$

d.h.

$$(3) \quad \begin{aligned} \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \xi^0} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi^0} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi^0} &= 0 \\ \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \xi^1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} &= 0 \\ \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \xi^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} &= 0 \end{aligned}$$

Aus (3) folgt

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \xi^0} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi^0} \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi^0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \xi^1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \end{aligned} = 0.$$

(4) ist der verallgemeinerte Gleichung von JACOBI Kurven.

(5)

Ist \mathfrak{b} , \mathfrak{y} Schnittpunkt bezw. Umföhrungskreis von Kreisen $\xi(t)$ im R_2 mit dem Nachbarkreis, so gilt :

$$(\mathfrak{b} \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} \xi) = (\mathfrak{b} \xi') = 0,$$

$$(\mathfrak{y} \mathfrak{y}) = 1, (\mathfrak{y} \xi) = (\mathfrak{y} \xi') = 0.$$

Dann haben wir folgende Tabelle skalarer Produkte zwischen ξ , ξ' , \mathfrak{b} , \mathfrak{y} .

—	ξ	ξ'	\mathfrak{b}	\mathfrak{y}
ξ	1	0	0	0
ξ'	0	1	0	0
\mathfrak{b}	0	0	0	a
\mathfrak{y}	0	0	a	1

Aus dem Multiplikationssatz der Determinanten folgt nun

$$| \xi \xi' \mathfrak{b} \mathfrak{y} |^2 = a^4.$$

Dann ergibt sich :

—	ξ	ξ'	\mathfrak{b}	\mathfrak{y}
ξ''	-1	0	c	\bar{c}
\mathfrak{b}'	0	$-c$	0	0
\mathfrak{y}'	0	$-\bar{c}$	0	0

So folgt⁽¹⁾

$$\xi'' = -\xi + c\eta + \bar{c}\eta,$$

$$\eta' = -c\xi',$$

$$\eta' = -\bar{c}\xi'.$$

(6)

Es seien drei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{R}}$ im R_3 gegeben. Ist

$$(1) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

eine normierte Kugel im R_1 durch \mathfrak{R} , so können wir

$$(2) \quad \eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1$$

einsetzen.

Dann muß

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

sein, wo φ und $\bar{\varphi}$ den Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$ bzw. η und $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeuten.

Wenn die Kugeln $\rho_\alpha \xi^\alpha$ mit den Kreisen $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ einen gleichen Winkel enthalten, dann folgt

$$(4) \quad (T^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0$$

Aus (4) ergibt sich, dass wir zwei solche Kugeln erhalten; aber wenn

$$T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}$$

sind, dann die enthält Kugel (1) immer mit \mathfrak{R} und $\bar{\mathfrak{R}}$ einen gleichen Winkel.

Wenn

$$\cos \varphi = k, \quad \cos \bar{\varphi} = \bar{k}$$

ist, dann folgt aus (2), (3):

$$(T^{\alpha\beta} - k^2 A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0,$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Bd. IV (1925) S. 127.

$$(T^{ab} - k^2 A^{ab}) \rho_a \rho_b = 0$$

wobei k, \bar{k} zwei verschiedene Konstanten sind.

Dann aus (1) folgt

$$(5) \quad \eta = \rho_a \xi^a, \quad (6) \quad \bar{\eta} = \bar{\rho}_a \bar{\xi}^a.$$

Wenn wir den Winkel zwischen (5) und (6) mit ϕ bezeichnet, dann folgt

$$(7) \quad \cos^2 \phi = \rho_a \bar{\rho}_b (\xi^a \bar{\xi}^b) = A^{ab} \rho_a \bar{\rho}_b.$$

Wenn ζ die zu $\bar{\eta}$ in bezug auf die Kugel η inverse Kugel ist, dann folgt

$$\zeta = 2(\bar{\eta} \eta) \eta - \bar{\eta}.$$

Aus (5), (6) folgt

$$\zeta = 2(\bar{\rho}_b \bar{\xi}^b, \rho_a \xi^a) \rho_a \xi^a - \bar{\rho}_b \bar{\xi}^b = 2 \rho_a^2 \bar{\rho}_b A^{ab} \xi^a - \bar{\rho}_b \bar{\xi}^b.$$

Zwei Kugeln η und $\bar{\eta}$ bestimmen einen Kugelbüschel, dessen ∞^1 Kugeln η gegeben sind durch

$$\eta = \alpha \eta + \beta \bar{\eta},$$

wobei α, β irgend welche skalare Zahlen sind.

Aus (5), (6) folgt

$$\eta = \alpha \rho_a \xi^a + \beta \bar{\rho}_b \bar{\xi}^b.$$

Für alle Kugeln σ , die η und $\bar{\eta}$ berühren, aber nicht durch \mathfrak{R} gehen, gilt:

$$(\sigma \eta)^2 = (\sigma \bar{\eta})^2 = 1.$$

Aus (5) (6) folgt

$$(\sigma, \rho_a \xi^a)^2 = (\sigma, \bar{\rho}_b \bar{\xi}^b)^2 = 1.$$

(7)

Aus (16) in (1) folgt:

$$\sec^2 2\varphi = \frac{\cot^2 \varphi + 1}{\cot^2 \varphi - 1} = \frac{T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}{(2 T^{11} - A^{11}) \rho_1^2 + 2 (2 T^{12} - A^{12}) \rho_1 \rho_2 + (2 T^{22} - A^{22}) \rho_2^2},$$

$$\cos^2 2\varphi = \frac{(2T^{11} - A^{11})\rho_1^2 + 2(2T^{12} - A^{12})\rho_1\rho_2 + (2T^{22} - A^{22})\rho_2^2}{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2},$$

$$\sin^2 2\varphi = \frac{(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2}{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2},$$

$$\tan^2 2\varphi = \frac{(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2}{(2T^{11} - A^{11})\rho_1^2 + 2(2T^{12} - A^{12})\rho_1\rho_2 + (2T^{22} - A^{22})\rho_2^2},$$

$$\begin{aligned} \tan^4 \varphi &= \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \sec^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \operatorname{cosec}^2 \varphi} \\ &= \frac{[(A^{11} - T^{11})\rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12})\rho_1\rho_2 + (A^{22} - T^{22})\rho_2^2]^2}{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}. \end{aligned}$$

Aus $\cos^2 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ in (1) folgt

$$\begin{aligned} &[T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2][(2T^{11} - A^{11})\rho_1^2 + \\ &+ 2(2T^{12} - A^{12})\rho_1\rho_2 + (2T^{22} - A^{22})\rho_2^2]. \end{aligned}$$

(8)

Hier betrachten wir Kreise im R_2 . Ist ξ ein Kreis und \mathfrak{z} ein anderer Kreis, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Wir betrachten einen Kreishüschel

$$(2) \quad \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z},$$

wobei λ, μ zwei Parameter sind, dann folgt

$$(3) \quad \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z} = 2\lambda(\mathfrak{z}\xi)\xi + (\mu - \lambda)\mathfrak{z}.$$

Wenn \mathfrak{y}' der zu ξ in bezug auf den Kreis (3) inverse Kreis ist, dann folgt

$$\begin{aligned} (4) \quad \mathfrak{y}' &= 2(\xi, 2\lambda(\mathfrak{z}\xi)\xi + (\mu - 1)\mathfrak{z})(2\lambda(\mathfrak{z}\xi)\xi + (\mu - 1)\mathfrak{z}) - \xi \\ &= 2(2\lambda + \mu - 1)(\xi\mathfrak{z})(2\lambda(\mathfrak{z}\xi)\xi + (\mu - 1)\mathfrak{z}) - \xi. \end{aligned}$$

Aus (4) folgt, dass, wenn

$$2\lambda + \mu - 1 = 0, \quad (\xi \mathfrak{z}) = 0$$

oder

$$2\lambda (\mathfrak{z} \xi) \xi + (\mu - 1) \mathfrak{z} = 0 \quad \text{ist,}$$

dann sich

$$\eta' = -\xi \quad \text{ergibt.}$$

So folgt der

Satz: Wenn

$$2\lambda + \mu - 1 = 0, \quad (\xi \mathfrak{z}) = 0$$

oder

$$2\lambda (\mathfrak{z} \xi) \xi + (\mu - 1) \mathfrak{z} = 0 \quad \text{ist,}$$

dann kann man η' mit ξ zusammenfallen lassen.

Aus (4) folgt

$$\begin{aligned} \eta' &= 4(2\lambda + \mu - 1)\lambda(\xi \mathfrak{z})\eta \\ &\quad + (2\lambda + \mu - 1)(\mu - 1 + 4\lambda)(\bar{\eta} + \xi) - \xi, \end{aligned}$$

wobei $\bar{\eta}(\eta)$ einer der zu $\xi(\mathfrak{z})$ in bezug auf den Kreis $\mathfrak{z}(\xi)$ inversen Kreise ist.

Ist ξ ein Kreis und \mathfrak{z} ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(5) \quad \eta = 2(\mathfrak{z} \xi) \xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf den Kreis ξ inverse Punkt.

Betrachten wir einen Kreisbüschel

$$(6) \quad \lambda \eta + \mu \mathfrak{z},$$

wobei λ, μ zwei Parameter sind. Dann folgt

$$(7) \quad \lambda \eta + \mu \mathfrak{z} = 2\lambda (\mathfrak{z} \xi) \xi - \lambda \mathfrak{z} + \mu \mathfrak{z} = 2\lambda (\mathfrak{z} \xi) \xi + (\mu - \lambda) \mathfrak{z}.$$

Ist ξ senkrecht zu (2), dann folgt

$$2\lambda (\mathfrak{z} \xi) + (\mu - 1)(\xi \mathfrak{z}) = 0,$$

d.h.

$$[2\lambda + (\mu - 1)](\xi \zeta) = 0,$$

so folgt

$$(\xi \zeta) = 0,$$

d.h. ξ ist senkrecht zu ζ .

Setzen wir

$$\sigma = 2\lambda(\zeta \xi)\xi + (\mu - 1)\zeta,$$

und damit σ zu zwei gegebene Kreise θ und δ senkrecht ist, müssen wir λ , μ finden aus

$$\frac{2\lambda}{1-\mu} = \frac{(\theta \zeta)}{(\zeta \xi)(\theta \xi)}, \quad \frac{2\lambda}{1-\mu} = \frac{(\delta \zeta)}{(\zeta \xi)(\delta \xi)},$$

denn

$$0 = 2\lambda(\zeta \xi)(\theta \xi) + (\mu - 1)(\theta \zeta),$$

$$0 = 2\lambda(\zeta \xi)(\delta \xi) + (\mu - 1)(\delta \zeta)$$

bestehen.

(9)

Wir nehmen die Behandlung des einfachsten Falls, dass die Gleichungen der veränderlichen Flächen zwei Parameter enthalten :

$$\phi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, c_1, c_2) = 0, \quad \psi(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, c_1, c_2) = 0.$$

Löst man diese Gleichungen nach den Parametern c_1 und c_2 auf, so erhält man als Gleichungen der veränderlichen Raumkurven⁽¹⁾

$$(1) \quad f_1(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = c_1, \quad f_2(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = c_2$$

Zur Bestimmung der Flächen muß nun eine Gleichung sein :

$$(2) \quad F(c_1, c_2) = 0.$$

Die Gleichung der Flächen erhält man durch Elimination der Parameter c_1 und c_2 in der Form

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (II), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 6 (1933) S. 185.

$$F(f_1, f_2) = 0.$$

Sei $\bar{U} = 0$ die Gleichung der Fläche, so müsste

$$U = F(f_1, f_2)$$

eine Identität sein. Differenziert man diese der Reihe nach partiell nach ξ^I , ξ^{II} , ξ^{III} , so erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^I} = F'(f_1) \frac{\partial f_1}{\partial \xi^I} + F'(f_2) \frac{\partial f_2}{\partial \xi^I},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^{II}} = F'(f_1) \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{II}} + F'(f_2) \frac{\partial f_2}{\partial \xi^{II}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^{III}} = F'(f_1) \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{III}} + F'(f_2) \frac{\partial f_2}{\partial \xi^{III}},$$

wo z. B. $F'(f_1)$ die partielle Ableitung von F nach f_1 bedeutet. Sollen diese drei in $F'(f)$ und $F''_2(f_2)$ linearen Gleichungen verträglich sein, so muß

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial \xi^I} & \frac{\partial U}{\partial \xi^{II}} & \frac{\partial U}{\partial \xi^{III}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^I} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{II}} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{III}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi^I} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^{II}} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^{III}} \end{vmatrix}$$

sein, d.h. die Funktionaldeterminante von U, f_1, f_2 muß verschwinden. Dieser partiellen Differentialgleichung muß also jede Gleichung $U=0$ einer der zu Flächenfamilie angehörigen Flächen genügen.

Die Koordinaten $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$ eines veränderlichen Punkts seien reelle Funktionen von zwei reellen Parametern u, v , so dass

$$(4) \quad \xi^I = f(u, v), \quad \xi^{II} = \varphi(u, v), \quad \xi^{III} = \psi(u, v)$$

ist, wobei vorausgesetzt sei, dass für einen gewissen Bereich B der uv -Ebene diese drei Funktionen eindeutig analytische Funktionen der Parameter u, v seien.

Da ist vorauszusetzen, dass irgend zwei von den drei Funktionaldeterminanten

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^I}{\partial u} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi^I}{\partial v} & \frac{\partial \xi^{II}}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^{II}}{\partial u} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi^{II}}{\partial v} & \frac{\partial \xi^{III}}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^{III}}{\partial u} & \frac{\partial \xi^I}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi^{III}}{\partial v} & \frac{\partial \xi^I}{\partial v} \end{vmatrix}$$

identisch nicht verschwinden; denn würden die beiden ersten verschwinden, so würden nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie zwei Beziehungen von der Form

$$(6) \quad F_1(\xi^I, \xi^{II})=0, \quad F_2(\xi^{II}, \xi^{III})=0$$

bestehen, und die Gleichung (1) würde ein Paar von Kurven darstellen, wie es aus (6) hervorgeht.

Im Raum $\{\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}\}$ wird durch das Grundintegral eines einfachsten regulären Variationsproblems eine Massbestimmung eingeführt: das Bogenelement der Kurve $\{\xi^I(t), \xi^{II}(t), \xi^{III}(t)\}$ ist

$$(7) \quad ds = F \left\{ \xi^I(t), \xi^{II}(t), \xi^{III}(t), \frac{d\xi^I}{dt}, \frac{d\xi^{II}}{dt}, \frac{d\xi^{III}}{dt} \right\} dt;$$

die Bogenlänge einer Kurve $\{u(t), v(t)\}$ auf der Fläche

$$(8) \quad \xi^I = \xi^I(u, v), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(u, v), \quad \xi^{III} = \xi^{III}(u, v)$$

wird durch das Integral

$$(9) \quad s = \int_{t_1}^{t_2} F \left\{ \xi^I(u, v), \dots, \frac{\partial \xi^I}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \xi^I}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \dots \right\} dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} f \left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) dt$$

gemessen.

Beim Übergang von den Parametern u, v zu den anderen Parametern \bar{u}, \bar{v} durch die in einem Bereich $\mathfrak{B}(u, v)$ reguläre Transformation

$$(10) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}), \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$$

geht das Bogenelement der Flächenkurve über in

$$ds = \bar{f}(\bar{u}(\tau), \bar{v}(\tau), \frac{d\bar{u}}{d\tau}, \frac{d\bar{v}}{d\tau}) d\tau.$$

Die Funktion

$$f(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$$

und alle aus ihr durch eine reguläre Substitution (4) hervorgehenden Funktionen sind hinsichtlich der Längenmessung auf der Fläche gleichwertig; da auch die anderen geometrischen Grössen invariant gegenüber der Substitution (4) definiert werden, so kann man

$$f(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$$

die Massbestimmung der Fläche nennen.⁽¹⁾

Es sei ein Paar von Kurven K von n^{ter} Ordnung im R_2 gegeben und es sei

$$\varphi(x^I, x^{II}) = 0$$

ihre Gleichung, die in des homogenen Kreises Koordinaten⁽²⁾ x^I, x^{II} im R_2 geschrieben ist.

Verstehen wir unter Uf die Operation

$$Uf \equiv x^I \frac{\partial f}{\partial x^I} + x^{II} \frac{\partial f}{\partial x^{II}},$$

die auf eine Funktion f von x^I, x^{II} ausgeführt ist, so ist

$$U\varphi = 0$$

eine in x^I, x^{II} von $(n-1)^{\text{ten}}$, in x^I, x^{II} vom ersten Grade homogene Gleichung.

Werden x^I, x^{II} gegeben, so stellt $U\varphi = 0$ ein Paar von Kurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, geschrieben in x^I, x^{II} , dar, die sogenannte erste Polare

(1) GAUSS, G.: Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen, *Math. Ann.* 100 (1928) S. 1.

(2) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (II), *Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan*, Vol. V, No. 6 (1933) S. 182.

des Punktpaares (x^I, x^{II}) hinsichtlich der gegebenen Kurve K . Die Gleichung

$$U(U\varphi)=0$$

oder symbolisch kürzer

$$U'\varphi=0$$

ist in x^I, x^{II} homogenen von $2(n-2)^{er}$, in x', x'' homogenen von zweiter Ordnung. Bei gegebenen x', x'' stellt sie die zweite Polarkurve des Punktes (x^I, x^{II}) hinsichtlich der gegebenen Kurve K dar. Allgemein ist

$$U^m\varphi=0$$

eine in x^I, x^{II} vom $2(n-m)^{en}$, in x^I, x^{II} vom m^{en} Grade homogene Gleichung. Bei gegebenen Punkten (x^I, x^{II}) stellt sie eine Kurve $(n-m)^{er}$ Ordnung in x^I, x^{II} , die m^{te} Polarkurve des Punktes x', x'' hinsichtlich K , dar.

(10)

Wir betrachten zunächst eine charakteristische Eigenschaft des Kreises und der Kugel.

Die Kugel hat die Eigenschaft,⁽¹⁾ dass

- a) durch ihre sämtlichen Punkte mit Ausnahme höchstens eines Punktes, des Mittelpunktes, genau ein ebener Schnitt gelegt werden kann, der einen Teil kleinsten Volumens von ihr abtrennt, und dass
- b) alle Schnittovale durch den Mittelpunkt gleichen Flächeninhalt besitzen.

Die erste Eigenschaft a) besitzen die Ellipsoide auch, wie eine affine Transformation zeigt.

Ob die Ellipsoide durch diese Eigenschaft charakterisiert werden können, ist eine anscheinend noch nicht zu beantwortende Frage, auf die mich Herr W. Süß aufmerksam gemacht hat.

(1) MATSUMURA, S.: Charakteristische Eigenschaft des Kreises und der Kugeln, die jetzt in der Presse in Tôhoku Math. Journ. ist.

Ich werde hier kurz zeigen, dass ein Eikörper, der nur die Eigenschaft a) besitzt, stets einen Mittelpunkt hat.

Daraus aber werde ich dann den folgenden Satz gewinnen :

Die Kugel ist der einzige Eikörper, der die beiden Eigenschaften a) und b) gemeinsam besitzt.

Ein entsprechender Satz gilt auch für den Kreis ; der Flächeninhalt der Schnittovale ist dabei durch die Länge der Schnittsehnens zu ersetzen ; der Beweis verläuft analog dem hier gegebenen Beweis für den Kugelsatz, ist natürlich einfacher, besonders im zweiten Teil.

Der Beweis des ersten Teils ist analog dem Beweis eines ähnlichen Satzes über den Kreis, den Süß im 40. Bande des Jahresberichts der D.M.V. gegeben hat.

I *Beweis der Mittelpunkteigenschaft aus a).*

Der Eikörper E enthalte höchstens einen Punkt O, durch den mehr als ein ebener Schnitt geht, der kleinstes Volumen abtrennt.

In einem allgemeinen Punkt P von E sei $v(P)$ dieses kleinste Volumen, das durch einen ebenen Schnitt $s(P)$ abgetrennt wird.

$v(P)$ ist eine stetige Ortsfunktion in E, die darin in einem Punkt R ihren maximalen Wert annimmt :

$$(1) \quad v(R) \geq v(P).$$

Wir behaupten nun, dass alle ebenen Schnitte durch R das Volumen von E halbieren ; dann folgt hieraus bekanntlich die behauptende Eigenschaft von E, einen Mittelpunkt zu besitzen, da R selbst Mittelpunkt sein muß⁽¹⁾ und gerade mit dem Ausnahmepunkt O identisch wird.

a) Verbindet man R mit einem beliebigen Randpunkt von E geradlinig, so nimmt $v(P)$ auf der Verbindungsstrecke nach dem Rande zu monoton ab und ist am Ende gleich Null.

Nun sei

$$0 < \eta < v(R).$$

Wir bestimmen auf jedem Strahl des Bündels durch R den R

(1) FUNK, P.: Math. Annalen 77; KUBOTA, T.: Tôhoku Math. Journ. 17.

nächstliegenden Punkt P_η , für den

$$v(P_\eta) = \eta$$

ist.

Die Menge M_η dieser Punkte P_η gehört ganz dem Innern des Eikörpers E an und ist eine stetige geschlossene Fläche; sie trennt R vom Rande von E und ist bezüglich R eine sogenannte Sternfläche, da sie mit jedem Strahl des Bündels (R) genau einen Punkt gemein hat.

Ist

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < v(R),$$

so enthält M_{η_1} die Fläche M_{η_2} im Innern.

$\beta)$ Wir zeigen jetzt, dass jede Fläche M_η sogar konvex ist.

Es sei $P_\eta (\neq 0)$ ein beliebiger Punkt von M_η und $s(P_\eta)$ der nach Voraussetzung eindeutig bestimmte ebene Schnitt, der von E einen Teilkörper vom Volumen

$$v(P_\eta) = \eta$$

abtrennt.

$s(P_\eta)$ kann dann durch keinen inneren Punkt I von M gehen, da nach Konstruktion von M_η und $\alpha)$ dort

$$v(I) > \eta$$

sein muß, während doch das von $s(P_\eta)$ abgetrennte Volumen gleich η ist; $v(I)$ wäre dann nicht das kleinste abgeschnittene Volumen im Gegensatz zur Definition der Funktion v .

M_η besitzt also in jedem ihrer Punkte eine Stützebene und ist also konvex.

$s(P_\eta)$ nennen wir auch Stützoval.

Wir sehen zugleich, dass alle Schnittovale von E , die einen Teil von Volumen η von E abschneiden, Stützovale an M_η sind.

$\gamma)$ Umgekehrt teilen alle Stützovale von M_η für Werte η in genügender Nähe von $v(R)$ den Teilkörper vom Volumen η von E ab.

Nach $\beta)$ müssen wir zu diesem Zweck nur einsehen, dass M_η keine Ecken hat, sondern in jedem Punkt nur ein Stützoval besitzt.

Eine Ecke aber kann nur in den eventuellen Ausnahmepunkt O eintreten.

Ist

$$O \neq R,$$

so können wir Ecken ausschliessen, indem wir η hinreichend nahe bei $v(R)$ wählen.

Ist aber

$$O = R,$$

so bedarf es keiner Einschränkung bezüglich η .

d) Es sei M_0 die Punktmenge im Innern aller M_η .

Zu ihr gehört R und für ihre sämtlichen Punkte ist

$$v = v(R).$$

Aus elementarsten geometrischen Gründen kann deshalb M_0 keine inneren Punkte besitzen.

M_0 ist also ein Punkt (R), eine Strecke oder ein Oval.

Eine Strecke und ein Oval kommen aber nicht in Betracht, da in ihren End-bezw. Randpunkten mehr als ein Schnitt kleinsten abgetrennten Volumens möglich wäre.

Also ziehen sich die Flächen M_η auf den Punkt R zusammen und alle Schnitte durch R teilen dasselbe Volumen von E ab, d.h. sie halbieren das Volumen von E .

Zugleich sieht man, dass

$$O \equiv R$$

ist.

II Beweis der Kugeleigenschaft aus a) und b).

Wenn alle Schnittovale durch einen festen Punkt O eines Eikorpers denselben Flächeninhalt besitzen, so besitzt E die folgende von T. KUBOTA l.c. gefundene Eigenschaft: Sind

zwei beliebige einander entgegengesetzt gerichtete Radienvektoren von E von O aus, so ist

$$(2) \quad r_1^2 + r_2^2 = \text{const.}$$

Wegen der in I bewiesenen Tatsache, dass unser Eikörper E den Punkt O zum Mittelpunkt hat, folgt also aus (2)

$$r_1 = r_2 = \text{const.},$$

d.h. E ist eine Kugel. w.z.b.w.

(11)

Es seien ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei beliebige linear unabhängige Kugeln, dann sei ein beliebiges Punktepaar ξ mit

$$(1) \quad \xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3,$$

gegeben, wobei a_i drei Konstanten sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (\xi \xi) = a_1^2 (\xi_1 \xi_1) + 2 a_1 a_2 (\xi_1 \xi_2) + \dots + a_3^2 (\xi_3 \xi_3) = 0.$$

Die Diskriminante der vorhergehenden Gleichung ist :

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} (\xi_1 \xi_1) & (\xi_1 \xi_2) & (\xi_1 \xi_3) \\ (\xi_2 \xi_1) & (\xi_2 \xi_2) & (\xi_2 \xi_3) \\ (\xi_3 \xi_1) & (\xi_3 \xi_2) & (\xi_3 \xi_3) \end{vmatrix}$$

Es ist nachzuweisen, dass dieselbe verschwindet, wenn $(\xi, \xi_i) = 0$, d.h. ξ_i ein Punkt ist.

Aus (1) folgt

$$(\xi \xi_1) = (\xi \xi_2) = (\xi \xi_3) = 0,$$

$$0 = a_1 (\xi_1 \xi_1) + a_2 (\xi_1 \xi_2) + a_3 (\xi_1 \xi_3),$$

$$0 = a_1 (\xi_2 \xi_1) + a_2 (\xi_2 \xi_2) + a_3 (\xi_2 \xi_3),$$

$$0 = a_1 (\xi_3 \xi_1) + a_2 (\xi_3 \xi_2) + a_3 (\xi_3 \xi_3).$$

Da diese Gleichungen neben einander bestehen müssen, so ist in der Tat

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) & (x_3, x_2) & (x_3, x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

(12)

Jeder Kreis x des Büschels (α, \mathfrak{B}) im R_2 kann in der Form dargestellt werden :

$$(1) \quad x = \alpha - \lambda \mathfrak{B},$$

wobei α, \mathfrak{B} zwei Kreise und λ ein Skalar sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (x, x) = (\alpha, \alpha) - 2\lambda(\alpha, \mathfrak{B}) + \lambda^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}).$$

Wenn x ein Punkt ist, so muß

$$(x, x) = 0$$

sein. Daher erhält man folgende in λ quadratische Gleichung

$$(3) \quad \lambda^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) - 2\lambda(\alpha, \mathfrak{B}) + (\alpha, \alpha) = 0,$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 , in Gl. (1) eingesetzt, die beiden dem linearen Büschel (α, \mathfrak{B}) und dem absoluten Netz gemeinsamen Kreise x_1 und x_2 liefern.

Man hat also

$$x_1 = \alpha - \lambda_1 \mathfrak{B}$$

$$x_2 = \alpha - \lambda_2 \mathfrak{B};$$

folglich wird das Doppelverhältniss der vier Kreise $\alpha, \mathfrak{B}, x_1, x_2$

$$(4) \quad (\alpha, \mathfrak{B}, x_1, x_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Die Auflösung der Gleichung (3) ergibt aber

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha \mathfrak{B}) + \sqrt{(\alpha \mathfrak{B})^2 - (\alpha \alpha)(\mathfrak{B} \mathfrak{B})}}{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})},$$

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha \mathfrak{B}) - \sqrt{(\alpha \mathfrak{B})^2 - (\alpha \alpha)(\mathfrak{B} \mathfrak{B})}}{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})}.$$

Nun kann man setzen

$$(\alpha \alpha) = 1, \quad (\alpha \mathfrak{B}) = \cos \varphi, \quad (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) = 1,$$

wobei φ der eingeschlossene Winkel von α und \mathfrak{B} ist.

Daher wird :

$$\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

$$\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}.$$

Mithin ist

$$(5) \quad e^{i\varphi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (\alpha, \mathfrak{B}, \xi_1, \xi_2)$$

oder

$$\varphi = -\frac{i}{2} \lg (\alpha, \mathfrak{B}, \xi_1, \xi_2).$$

Aus (5) ergibt sich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$(\alpha, \mathfrak{B}, \xi_1, \xi_2) = -1,$$

für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ erhält man aus Gl. (5)

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Ueber Flächen und Kurven (IV): Charakteristische Eigenschaften der Homothetie von Eiflächen

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, July 3, 1933)

1. Aus der MINKOWSKISCHEN Theorie von Volumen und Oberfläche (Math. Ann. 57) sind verschiedene Aussagen über homothetische Eiflächen zu folgern; z. B. nun sind die Ungleichungen für die gemischten Volumina, eventuell unter einschränkenden Differenzierbarkeitsbedingungen, mit der Gültigkeit der Gleichheitszeichen für Homothetie charakteristisch.⁽¹⁾

Die Sätze, welche die Kugel als einige Eiflächen konstanter mittlerer oder GUSSESCHER Krümmung kennzeichnen, folgen als einfache Anwendungen, wenn eine der bei Bildung der gemischten Volumina miteinander in Beziehung gesetzten Flächen selbst eine Kugel ist.

Diese Ergebnisse gewinnt man allerdings einfacher und vielleicht sogar am einfachsten aus den elementar ableitbaren verschiedenen Darstellungen jener Volumina (vergl. W. Stûß, Zur relativen Differentialgeometrie V: Ueber Eihyperflächen im R^{n+1} , Tôhoku Math. Journ. 31, Satz 2).

Nun gelten für homothetische Eiflächen die ganz analogen Kennzeichnungen durch feste Relativ-Krümmungen, sowohl die mittlere wie das Analogon der GAUSSSCHEN Krümmung, bei allgemeiner Eifläche. (W. Stûß, Zur relativen Differentialgeometrie I, Jap. Journ. of Math. 4).

Sie heissen dann Relativsphären.

Hier soll nun ohne Benutzung der MINKOWSKISCHEN Theorie mit den Mitteln der relativen Differentialgeometrie ein neuer Beweis für die

(1) MATSUMURA, S.: Charakteristische Eigenschaften der Homothetie von Eiflächen, die jetzt in der Presse in Tôhoku Math. Journ. ist.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 2, Sept. 1933.]

genannten Satze gegeben werden, der sich an die Behandlung einer ähnlichen Frage in W. BLASCHKES Vorlesungen über Differentialgeometrie (Band II, S. 214/215) anschliesst.

Dabei bediene ich mich der formalen Grundlagen der relativen Flachentheorie, die ich auf S. 43 ff. im 7. Band des Jap. Journ. of Math. entwickelt habe und deren Bezeichnung ich übernehme.

Es zeigt sich dabei wieder der Zusammenhang der MINKOWSKISCHEN Theorie mit der Lösung einer elliptischen Differentialgleichung auf der Kugel, der von D. HILBERT (Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Satz 50 ff.) dargestellt worden ist.

2. Ich beweise zunächst:

Ist die mittlere Relativ-Krümmung

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

einer Eifläche ξ bezüglich einer anderen e als Eifläche konstant, so ist ξ Relativ-Sphäre bezüglich e .

Sind p und q die Abstände des Ursprungs von parallelen Tangentenebenen an ξ und e , so gilt für den Relativabstand r nach den Ableitungsgleichungen der relativen Flachentheorie

$$r = \frac{p}{q} = -\xi\eta,$$

$$r_i = -\xi\eta_i,$$

$$r_{ik} = -\xi_k\eta_i - \xi\eta_{ik} = G_{ik} - \xi\eta_{ik},$$

also

$$(1) \quad r_i^2 = g^{ik} r_{ik} = 2 + 2Hr - 2t^i r_i.$$

Wir betrachten nun zunächst die zu (1) zugehörige homogene Differentialgleichung

$$(2) \quad u_i^2 + 2t^i u_i - 2Hu = 0.$$

Für jeden festen Vektor c ist $(c\eta)$ die Lösung von (2). Wir behaupten aber, dass jede Lösung von (2) diese Form hat.

Zum Beweis betrachten wir für eine beliebige Lösung u von (2) die Hüllfläche \mathfrak{z} der Ebenen

$$(3) \quad \mathfrak{z}\eta = u, \quad \text{für die} \quad \mathfrak{z}\eta_i = u_i \quad \text{ist.}$$

Der Ansatz

$$\mathfrak{z} = \alpha^i \xi_i + \beta e$$

führt bei skalarer Multiplikation mit η und η_k auf

$$\beta = u$$

bezw.

$$\alpha_k = -u_k,$$

sodass jetzt

$$(4) \quad \mathfrak{z} = -u^i \xi_i + u e$$

wird.

Daraus folgt

$$\mathfrak{z}_k = (-u_k^i - u^i A_{ik}^i + u B_k^i) \xi_i$$

und

$$\xi_1 \times \mathfrak{z}_2 - \xi_2 \times \mathfrak{z}_1 = (\xi_1 \times \xi_2) [-u_k^k - u^i A_{ik}^k + u B_k^k].$$

Nun ist aber

$$B_k^k = 2H$$

und

$$A_{ik}^k = 2t_i,$$

sodass wegen (2)

$$(5) \quad \xi_1 \times \mathfrak{z}_2 = \xi_2 \times \mathfrak{z}_1$$

ist.

Nach (5) aber müsste \mathfrak{z} eine Relativ-Minimalfläche bezüglich ξ sein, wegen der Geschlossenheit und Konvexität von ξ also selbst eine geschlossene Fläche von nirgends positiver Krümmung sein.

Daraus folgt aber

$$\mathfrak{g} = c \text{ konst.},$$

w. z. b. w..

Durch geeignete Wahl des Ursprungs kann man

$$c = 0$$

erreichen.

Die allgemeine Lösung von (1) ist also

$$(6) \quad w = \frac{p}{q} = -\frac{1}{H} = \text{konst.}, \quad \text{w. z. b. w..}$$

3. Konstante Relativ-Krümmung

$$\frac{1}{R_1 R_2}$$

führt auch auf Relativ-Sphären.

Den Beweis kann man nach BONNET auf den in Nr. 2 bewiesenen Satz zurückführen (vergl. BLASCHKE, Differentialgeometrie I, 1. Aufl. §76).

Ueber Flächen und Kurven (V): Ueber Minkowskis Stützfunktion

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, July 3, 1933)

Nach der MINKOWSKISCHEN Theorie (Geometrie der Zahlen) der konvexen Körper ist ein solcher Körper ganz durch seine Stützfunktion bestimmt.⁽¹⁾

Diese Stützfunktion lässt sich wiederum durch gewisse Eigenschaften charakterisieren, die dann umgekehrt gestatten, den zugehörigen konvexen Körper zu bestimmen.

Die von MINKOWSKI selbst angegebenen hinreichenden Bedingungen für eine Stützfunktion hat RADEMACHER (Berliner Math. Ges., Bd. 20, S. 14–19) verringert und gleichzeitig die Strecken und ebenen Bereiche als räumliche Figuren mit in Betracht gezogen.

Die RADEMACHERSchen Postulate für die Stützfunktion

$$H(u_i) = H(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

sind folgendes:

- I) $H(0) = 0$;
- II) $H(tu_i) = tH(u_i)$, wenn $t > 0$ ist.
- III) $H(u_i + v_i) \leq H(u_i) + H(v_i)$

Es ist aber zu bemerken, dass es von RADEMACHER beim Beweis wesent-

(1) MATSUMURA, S.: Über Minkowskis Stützfunktion, die jetzt in der Presse in Tôhoku Math. Journ. ist.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, No. 9, Sept. 1933.]

lich benutzt wird, dass H für endlich Argumente selbst endlich sei, ohne dass es besonders formuliert wird.

Wir fügen deshalb hinzu :

IV) $H(u_i)$ ist stets endlich.

Wir wollen versuchen, diese gegenüber der MINKOWSKISCHEN Stütz-funktion reduzierten Postulate für H noch zu verringern.

Wir übernehmen zu diesem Zweck I) und III), verringern II) und vermehren IV):

Unsere Postulate lauten :

A) $H(0)=0$

B) Es gilt mindestens eine ganze positive Zahl $p > 1$, sodass

$$H(pu_i) \geq p H(u_i) \text{ ist.}$$

C) $H(u_i + v_i) \leq H(u_i) + H(v_i)$.

D) Im Bereich $|u_i| < M$ ist H beschränkt :

$$|H(u_i)| < A(M).$$

Wir wollen zeigen, dass aus A)-D) die RADEMACHERSCHEN Forderungen I)-IV) gefolgert werden können, dass also insbesondere II) gültig ist.

Aus B) und C) erkennt man zunächst

$$\begin{aligned} p \cdot H(u_i) &\leq H(pu_i) \leq H(u_i) + H((p-1)u_i) \leq \dots \\ &\leq p H(u_i), \quad \text{d. h.} \end{aligned}$$

$$(1) \quad H(pu_i) = p H(u_i)$$

für die spezielle ganze Zahl $p > 1$.

Nun bilden wir für $t \geq 0$ die Hilfsfunktion

$$(2) \quad h(t) = H(tu_i) - t H(u_i),$$

und zwar bei beliebig gewählten, aber festen Werten u_i .

Nach (1), (2) und A)-D) gilt :

$$(3) \quad h(0) = h(1) = h(p) = 0,$$

$$(4) \quad h(s+t) \leq h(s) + h(t) \quad \text{für } s \geq 0, t \geq 0.$$

Aus C) und D) ersieht man ferner, dass IV) gültig wird.

Also ist nach D) auch für $t \leq 1$

$$(5) \quad |h(t)| \leq A(M) + n \cdot \text{Max} |H(1, \dots, 0, 1, 0, \dots)| = B(M)$$

Sei nun $n > 0$ eine ganze Zahl.

Dann ist nach (3) und (4)

$$(6a) \quad h(n) \leq h(1) + h(1) + \dots + h(1) = 0.$$

Analog zu (1) beweist man andererseits für jedes ganze $r > 0$:

$$\begin{aligned} H(r^r u_i) &\geq p H(p^{r-1} u_i) \geq p^2 H(p^{r-2} u_i) \geq \dots \\ &\geq p^r H(u_i), \end{aligned}$$

woraus dann wegen C) wieder folgt

$$(1') \quad H(p^r u_i) = p^r H(u_i).$$

Es ist also auch

$$(3') \quad h(p^r) = 0$$

für jedes ganze $r \geq 0$.

Ist nun

$$\begin{aligned} n &\leq p^r, \\ p^r &= an + \beta, \end{aligned}$$

wo

$$a > 0$$

und

$$\beta \geq 0$$

ganz ist, was wir durch passende Wahl von r stets erreichen können, so ist nach (4) und (6a)

$$h(p^r) \leq ah(n) + h(\beta) \leq 0.$$

Vergleichen wir dieses mit (3') und (6a), so folgt also, dass

$$(6) \quad h(n) = 0$$

für jedes ganze $n \geq 0$ ist.

Aus (6) und (4) folgt weiter

$$(7) \quad h(t+n) \leq h(t) \quad (t \geq 0),$$

d. h. $h(t)$ wird sicher seine grössten Werte schon im Intervall

$$0 \leq t \leq 1$$

annehmen!

Wir behaupten: es sei

$$(8) \quad h(t) \equiv 0 \quad \text{für } t \geq 0,$$

Angenommen, es sei

$$h(\tau) \neq 0.$$

Dann ist nach (1') und (2) für ganze $r \geq 0$.

$$\begin{aligned} (9) \quad h(p^r t) &= H(p^r t u_i) - p^r t H(u_i) \\ &= p^r [H(t u_i) - t H(u_i)] \\ &= p^r h(t). \end{aligned}$$

Für den speziellen Wert

$$t = \tau$$

ersieht man daraus, dass mit wachsendem r der absolute Betrag von

$$h(p^r \tau)$$

über alle Grenzen wächst.

Ware nun

$$h(\tau) > 0,$$

so würde dies im Widerspruch stehen zu D), (7) und der dort ausschliessenden Bemerkung.

h kann also keine positiven Werte annehmen.

Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, wo

$$h(\tau) < 0$$

ist.

Dann sei

$$n > \tau$$

ganz.

Nach (4) und (6) ist nun

$$0 = h(n) \leq h(\tau) + h(n - \tau),$$

nach unserer Annahme also

$$0 < h(n - \tau).$$

Zu jeder Stelle τ negativen Wertes müsste also mindestens eine Stelle positiven Wertes von

h

existieren im Widerspruch zu dem vorher Bewiesenen.

(8) ist also hiermit bewiesen.

(8) aber ist mit Postulat II) identisch, das also aus unseren Axiomen A)–D) bewiesen worden ist.

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (VII)

Sōji MATSUMURA

(Accepted for publication, July 3, 1933)

(1)

Es seien drei Kreise $\bar{\mathfrak{R}}, \bar{\mathfrak{R}}, \bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ im R_1 gegeben.

Ist $\mathfrak{y} = \rho_a \mathfrak{x}^a$ eine normierte Kugel im R_2 durch \mathfrak{R} , so setzen wir

$$(1) \quad \mathfrak{y} \mathfrak{y} = \rho_a \rho_b A^{ab} = 1$$

ein.

Dann muss

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{ab} \rho_a \rho_b \quad \text{sein,}$$

wobei φ den Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Wenn $\bar{\varphi}$ den Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ bedeutet, so besteht

$$(3) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{ab} \rho_a \rho_b$$

Seien $\rho_1, \rho_2; \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ die Wurzeln von

$$k^2 = T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2,$$

bezw.

$$k^2 = \bar{T}^{11} \bar{\rho}_1^2 + 2\bar{T}^{12} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{T}^{22} \bar{\rho}_2^2,$$

dann ist

$$\cos^2 \psi = \rho_1 \bar{\rho}_1 A^{11} \quad \text{oder} \quad \cos^2 \psi = \rho_1 \bar{\rho}_2 A^{12},$$

wobei ψ den Winkel zwischen $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ bedeutet und k eine Konstante ist.

(2)

Die Regelschar der F_2 ist durch

$$\eta = \rho_\lambda \xi^\lambda \quad \text{mit} \quad \rho_\lambda \rho_\mu A^{\lambda\mu} = 0$$

gegeben.⁽¹⁾

Betrachten wir, daß in dem Falle eine neue quadratische Relation

$$(1) \quad \rho_\lambda \rho_\mu G^{\lambda\mu} = 0$$

besteht.

Setzen wir

$$(2) \quad \begin{cases} f \equiv \rho_\lambda \xi^\lambda, \\ g_1 \equiv \rho_\lambda \rho_\mu A^{\lambda\mu}, \\ g_2 \equiv \rho_\lambda \rho_\mu G^{\lambda\mu}, \end{cases}$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho_1} &= \xi^1, & \frac{\partial g_2}{\partial \rho_1} &= 2(xG^{11} + yG^{12} + zG^{13}), \\ \frac{\partial f}{\partial \rho_2} &= \xi^2, & \frac{\partial g_2}{\partial \rho_2} &= 2(yG^{22} + xG^{12} + zG^{23}), \\ \frac{\partial f}{\partial \rho_3} &= \xi^3, & \frac{\partial g_2}{\partial \rho_3} &= 2(zA^{33} + yG^{13} + xA^{23}), \\ \frac{\partial g_1}{\partial \rho_1} &= 2(xA^{11} + yA^{12} + zA^{13}), \\ \frac{\partial g_1}{\partial \rho_2} &= 2(yA^{22} + xA^{12} + zA^{23}), \\ \frac{\partial g_1}{\partial \rho_3} &= 2(zA^{33} + yA^{23} + xA^{31}), \end{aligned}$$

wobei $\rho_1 \equiv x$, $\rho_2 \equiv y$, $\rho_3 \equiv z$ ist.

Aus

(1) THOMAS, G.: Über projektive Flächentheorie Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Bd. IV (1926), S. 237.

$$(3) \quad j = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ xA^{11} + yA^{12} + zA^{13} & yA^{22} + xA^{12} + zA^{23} & zA^{33} + yA^{23} + xA^{31} \\ xG^{11} + yG^{12} + zG^{13} & yG^{22} + xG^{12} + zG^{23} & zG^{33} + yA^{23} + xG^{31} \end{vmatrix}$$

folgt dann

$j \equiv (\text{Quadratische Gleichung in } x, y, z).$

Die Stelle für Maximum und Minimum von f auf $g_1=0, g_2=0$ muss auf der Fläche $J=0^{(1)}$ sein, also folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums f ist ∞^1 , wobei (1) besteht.

(3)

Im allgemeinen betrachten wir

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

welche der Grad n ist.

Die Bedingung von dem Maximum oder Minimum von (1) ist

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

(1) Vergl. etwa HADAMARD, J.: On ordinary Restricted Extrema in connection with Point Transformations, Bulletin of the American Math. Society, Vol. XXXV, p. 823.

wobei

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \quad g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \quad \dots, g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$$

bestehen.

Aus (2) folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums von f ist

$$(n-1)(p-1)(q-1)\dots\dots,$$

wobei

$$g_1=0, \quad g_2=0, \quad \dots\dots g_{n-1}=0,$$

und der Grad von $f, g_1, g_2, \dots\dots n$ bzw. $p, q, \dots\dots$ ist.

(4)

Zwei eigentliche Kreise ξ und η im R_2 bestimmen einen Kreisbüschel, dessen ∞^1 die Kreise ζ gegeben sind durch

$$(1) \quad \zeta = a\xi + \beta\eta,$$

wo a und β irgendwelche skalare Zahlen sind.

$$(2) \quad 0 = (\zeta\zeta) - a^2(\xi\xi) + 2a\beta(\xi\eta) + \beta^2(\eta\eta)$$

ist die Bedingung dafür, dass ζ Punktkreise sind.

Seien f eine Funktion von a, β und setzen wir

$$p = \frac{\partial f}{\partial a}$$

$$q = -\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

$$p_1 = 2[(\xi\xi)a + (\xi\eta)\beta],$$

$$q_1 = 2[(\xi\eta)a + (\eta\eta)\beta].$$

Aus

$$f = pq_1 - qp_1 = 0$$

folgt dann

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} [(\xi\eta)\alpha + (\eta\eta)\beta] - \frac{\partial f}{\partial \beta} [(\xi\xi)\alpha + (\xi\eta)\beta] = 0.$$

Die Stelle für Maximum und Minimum von f auf $(\zeta\zeta)=0$ muss auf der Kurve $j=0$ sein, also folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums von $f(\alpha, \beta)$ ist n , wobei der Grad von f , n und ζ die Punktkreise sind.

(5)

In dem Büschel der Kugeln $j = \sum \rho_s \xi^s$ durch unsern Kreis gibt es zwei Nullkugeln der Punkte, die sich als die Lösungen von

$$g = \sum \rho_s \rho_p A^{sp} = 0$$

ergeben.

Setzen wir

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial \rho_1} = \xi^1,$$

$$q \equiv \frac{\partial f}{\partial \rho_2} = \xi^2,$$

$$p_1 \equiv \frac{\partial g}{\partial \rho_1} = 2(A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2)$$

$$q_1 \equiv \frac{\partial g}{\partial \rho_2} = 2(A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2).$$

Aus

$$j = pq_1 - qp_1 = 0$$

folgt dann

$$j \equiv \xi^1(A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2) - \xi^2(A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2) = 0.$$

Die Stelle für Maximum und Minimum von f auf $g=0$ muss auf der Kurve $j=0$ sein, also folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums von η ist zwei, wobei η zwei Punktkugeln sind.

Setzen wir

$$f = \sum \rho_s \xi^s,$$

$$g = \sum \rho_u \rho_v T^{uv},$$

dann folgt der

Satz: Die Anzahl des Maximums und Minimums von f ist zwei, wobei f eine Kreisschar, die den Nachbarkreis berührt.

(6)

Wir haben als Affinentfernung eines Punktes ξ von der Flächenstelle \mathfrak{x} den Ausdruck

$$(1) \quad p = \frac{(\xi - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_w, \mathfrak{x}_v)}{|\sqrt{LN - M^2}|^{\frac{1}{2}}}$$

eingeführt.

Ist ξ eine Kugel und \mathfrak{x} ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(2) \quad \mathfrak{z} = 2(\mathfrak{x}\xi)\xi - \mathfrak{x}$$

der zu \mathfrak{x} in bezug auf die Kugel ξ inverse Punkt.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad p = \frac{(2(\mathfrak{z}\xi)\xi - 2\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_w, \mathfrak{x}_v)}{|\sqrt{LN - M^2}|^{\frac{1}{2}}}.$$

So folgt der

Satz: Ist ξ eine Kugel im R , und \mathfrak{x} ein nicht auf ihm liegender Flächenpunkt, dann ist die Affinentfernung p eines Punktes, des zu \mathfrak{x} in bezug auf die Kugel ξ inversen Punktes, von dem Flächenpunkt \mathfrak{x} ist mit

$$p = \frac{(2(\mathfrak{z}\xi)\xi - 2\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_w, \mathfrak{x}_v)}{|\sqrt{LN - M^2}|^{\frac{1}{2}}}$$

gegeben.

Bezeichnet man den Winkel, unter welchem der Kreis (b, b') zur Kugel (\mathfrak{x}) geneigt ist, mit V , so ist es leicht beweisbar, dass

$$(4) \quad \cos^2 V = (\mathfrak{x}b)^2 + (\mathfrak{x}b')^2 \text{ ist.}$$

Ist ξ eine Kugel und b ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(5) \quad b = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{g} in bezug auf die Kugel ξ inverse Kugel, so folgt aus (4) (5)

$$\begin{aligned}\cos^2 V &= [2(\mathfrak{g}\xi)(\xi\xi) - (\xi\xi)^2] \\ &+ [2(\mathfrak{g}'\xi)(\xi\xi) - (\mathfrak{g}'\xi)^2].\end{aligned}$$

Wenn

$$\xi = a\alpha + \beta\alpha'$$

ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\cos^2 V &= \cos^2 \omega \cdot a^2 + \cos^2 \omega' \cdot \beta^2, \\ \sin^2 V &= \sin^2 \omega \cdot a^2 + \sin^2 \omega' \cdot \beta^2, \quad (a^2 + \beta^2 = 1),\end{aligned}$$

wobei a, β zwei Parameter sind.

Wenn $\cos^2 V = k^2$ ist, dann folgt

$$k^2 = \cos^2 \omega \cdot a^2 + \cos^2 \omega' \cdot \beta^2,$$

wobei k ein Konstant ist.

Wenn

$$\xi = a \cos u + i a' \sin u, \quad i = \sqrt{-1},$$

dann

$$\begin{cases} \cos^2 V = \cos^2 \omega \cdot \cos^2 u - \cos^2 \omega' \cdot \sin^2 u, \\ \sin^2 V = \sin^2 \omega \cdot \cos^2 u + (1 + \cos^2 \omega') \sin^2 u. \end{cases}$$

Für zwei Kugeln von ξ ergibt sich

$$(6) \quad \begin{cases} \cos^2 V = \cos^2 \omega \cdot \cos^2 u + \sin^2 \omega' \cdot \sin^2 u, \\ \cos^2 \bar{V} = \cos^2 \bar{\omega} \cdot \cos^2 u + \sin^2 \bar{\omega}' \cdot \sin^2 u. \end{cases}$$

Aus (6) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 V}{\cos^2 \bar{V}} &= \frac{\cos^2 \omega \cdot \cos^2 u + \sin^2 \omega' \cdot \sin^2 u}{\cos^2 \bar{\omega} \cdot \cos^2 u + \sin^2 \bar{\omega}' \cdot \sin^2 u} \\ &= \frac{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega' \cdot \tan^2 u}{\cos^2 \bar{\omega} + \sin^2 \bar{\omega}' \cdot \tan^2 u}.\end{aligned}$$

Wenn $V = \bar{V}$, dann

$$1 = \frac{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega' \cdot \tan^2 u}{\cos^2 \bar{\omega} + \sin^2 \bar{\omega}' \cdot \tan^2 u},$$

$$\therefore \tan^2 u = \frac{\cos^2 \omega - \cos^2 \bar{\omega}}{\sin^2 \bar{\omega}' - \sin^2 \omega'},$$

so ergibt sich

$$\xi = \cos u \left(a + a' \sqrt{\frac{\cos^2 \omega - \cos^2 \bar{\omega}}{\sin^2 \bar{\omega}' - \sin^2 \omega'}} \right).$$

(7)

Durch die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{d\tau} = \phi(t, \tau)$$

ist ein Kurvensystem auf der Kreisfläche bestimmt, wie man die Orthogonaltrajektorien erhält.

Man ersetze $\frac{dt_1}{d\tau_1}$ durch $\phi(t, \tau)$ und $\frac{dt_2}{d\tau_2}$ durch $\frac{dt}{d\tau}$ in (4);⁽¹⁾ dann erhält man für die orthogonalen Kurven die Differentialgleichung

$$(\theta_1, \theta_1) \phi \frac{dt}{d\tau} + (\theta_1, \theta_1) \left(\phi + \frac{dt}{d\tau} \right) + (\theta_1, \theta_1) = 0.$$

(8)

Satz 1: Wenn ϕ zwei Richtungen von

$$Pd^2 + Qdtd\tau + Rd\tau^2 = 0 \quad \text{bedeutet,}$$

dann ist

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{(\theta_1, \theta_1)(\theta_2, \theta_2)} - (\theta_1, \theta_1) \sqrt{Q^2 - 4PR}}{(\theta_1, \theta_1)R - (\theta_1, \theta_1)Q + (\theta_1, \theta_1)P}$$

Satz 2: Wenn Parameterkurven Orthogonal sind, dann ist die Differentialgleichung der Linie auf Kreisflächen, die

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln, (1); Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. V, p. 69.

$$t = \text{const.}$$

mit den Winkeln β schneiden, mit

$$\frac{dt}{d\tau} = \tan \beta \sqrt{\frac{(\theta_{\tau} \bar{\theta}_{\tau})}{(\theta_i \bar{\theta}_i)}}$$

gegeben.

Satz 3: Die Differentialgleichungen der Kurven, die die Parameterkurven halbieren, sind mit

$$\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i)} dt - \sqrt{(\theta_{\tau} \bar{\theta}_{\tau})} d\tau = 0$$

und

$$\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i)} dt + \sqrt{(\theta_{\tau} \bar{\theta}_{\tau})} d\tau = 0$$

gegeben.

(9)

Sind

$$\rho_i(x^I, x^II, x^{III}) = \rho_i,$$

$$\rho_{\tau}(x^I, x^II, x^{III}) = \rho_{\tau},$$

$$\rho(x^I, x^II, x^{III}) = \rho,$$

die Gleichungen der drei Kurvenscharen in R_3 , dann ergibt⁽¹⁾ sich

$$\begin{aligned} & \partial x^I : \partial x^{II} : \partial x^{III} \\ &= \partial \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x^I} \right) : \partial \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x^{II}} \right) : \partial \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x^{III}} \right). \end{aligned}$$

(10)

Betrachten wir sechs Kreise

$$\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \text{ und } \eta''$$

im R_2 , wo eine Beziehung

$$(1) \quad \xi = \frac{p\xi' + q\xi''}{p+q}$$

(1) LUKAT, M.: BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie (1910) S. 629.

besteht, wobei p, q zwei skalare Grössen sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (\xi \eta) = \frac{p^2(\xi_1 \eta_1) + pq\{(\xi_1 \eta_2) + (\eta_1 \xi_2)\} + q^2(\xi_2 \eta_2)}{(p+q)^2}.$$

Wenn

$$(\xi_1 \eta_1) = (\xi_1 \eta_2) = (\eta_1 \xi_2) = (\xi_2 \xi_2) = 1$$

ist, dann folgt aus (2)

$$(\xi \eta) = 1,$$

so folgt der

Satz: Wenn die Kreise $\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_2; \eta_1, \xi_2; \xi_2, \eta_2$ mit einander berühren, so berühren auch ξ und η miteinander.

(11)

Es seien zwei Kreise ξ, η im R_2 gegeben. Wenn ζ ein Kreis, der durch die Schnittpunkte von ξ und η geht, ist, dann folgt

$$(1) \quad \zeta = a\xi + \beta\eta,$$

wobei a, β zwei skalare Grössen sind.

Wenn ein Punkt ξ auf ζ liegt, dann ergibt sich

$$(\xi \zeta) = a(\xi \xi) + \beta(\eta \xi),$$

d. h.

$$0 = a(\xi \xi) + \beta(\eta \xi),$$

$$(2) \quad \therefore a : \beta = (\eta \xi) : \{ -(\xi \xi) \}.$$

Setzen wir (2) in (1) ein, dann folgt

$$(3) \quad \zeta = (\eta \xi) \xi - (\xi \xi) \eta.$$

Wenn η auf ζ liegt, dann folgt

$$(4) \quad \zeta = (\eta \eta) \xi - (\xi \eta) \eta$$

Aus (3), (4) ergibt sich

$$(5) \quad ((\eta \xi) - (\eta \eta)) \xi = ((\xi \xi) - (\xi \eta)) \eta.$$

So folgt der

Satz: Wenn zwei Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ immer auf den Kreisen, die durch die Schnittpunkte von zwei Kreisen $\hat{\xi}$ und η gehen, liegen, dann besteht (5).

Wenn drei Punkte $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\bar{\mathfrak{x}}}$ auf einem Kreis γ wie \mathfrak{x} in (3) liegen, dann folgt

$$(6) \quad \begin{cases} \zeta = (\eta \mathfrak{x}) \hat{\xi} - (\hat{\xi} \mathfrak{x}) \eta, \\ \bar{\eta} = (\eta \bar{\mathfrak{x}}) \hat{\xi} - (\hat{\xi} \bar{\mathfrak{x}}) \eta, \\ \bar{\bar{\zeta}} = (\eta \bar{\bar{\mathfrak{x}}}) \hat{\xi} - (\hat{\xi} \bar{\bar{\mathfrak{x}}}) \eta. \end{cases}$$

Nach den Bedingungen

$$(\zeta \gamma) = 0, (\bar{\zeta} \gamma) = 0 \text{ und } (\bar{\bar{\zeta}} \gamma) = 0$$

ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} (\eta \mathfrak{x})(\hat{\xi} \gamma) = (\hat{\xi} \mathfrak{x})(\eta \gamma), \\ (\eta \bar{\mathfrak{x}})(\hat{\xi} \gamma) = (\hat{\xi} \bar{\mathfrak{x}})(\eta \gamma), \\ (\eta \bar{\bar{\mathfrak{x}}})(\hat{\xi} \gamma) = (\hat{\xi} \bar{\bar{\mathfrak{x}}})(\eta \gamma), \end{cases}$$

so folgt

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{(\eta \mathfrak{x})}{(\eta \bar{\mathfrak{x}})} = \frac{(\hat{\xi} \mathfrak{x})}{(\hat{\xi} \bar{\mathfrak{x}})}, \\ \frac{(\eta \bar{\mathfrak{x}})}{(\eta \bar{\bar{\mathfrak{x}}})} = \frac{(\hat{\xi} \bar{\mathfrak{x}})}{(\hat{\xi} \bar{\bar{\mathfrak{x}}})}. \end{cases}$$

(12)

Satz: Wenn zwei Kreise

$$\mathfrak{x}^*[a=I, II]$$

im R_2 einen Kreis $\hat{\xi}$ senkrecht schneiden, dann scheiden zwei Kreise, die zu η in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inversen Kreise, den Kreis $\hat{\xi}$ auch senkrecht.

Beweis: Aus unseren Voraussetzungen ergibt sich

$$(\eta^* \hat{\xi}) = 0, [a=I, II].$$

Aus

$$\eta^* = 2(\xi^* \xi) \xi - \xi^*,$$

folgt

$$(\eta^* \xi) = 2(\xi^* \xi)(\xi \xi) - (\xi^* \xi),$$

also muss

$$(\eta^* \xi) = 0$$

sein. w. z. b. w.

(13)

Ist ξ ein Kreis und γ ein nicht auf ihm liegender Kreis im R_n , so ist

$$(1) \quad \eta = 2(\gamma \xi) \xi - \gamma$$

der zu γ in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Wenn γ durch Inversion invariant ist, dann folgt

$$(2) \quad \gamma = 2(\gamma \xi) \xi - \gamma.$$

Aus (2) folgt

$$(\eta \gamma) = (\gamma, 2(\gamma \xi) \xi - \gamma),$$

d. h.

$$(3) \quad (\eta \gamma) = (\gamma \xi) (\xi \eta).$$

Für den andern Kreis $\bar{\gamma}$ anstatt γ ergibt sich

$$(4) \quad (\eta \bar{\gamma}) = (\bar{\gamma} \xi) (\xi \eta).$$

Aus (3), (4) ergibt sich

$$\frac{(\eta \gamma)}{(\eta \bar{\gamma})} = \frac{(\xi \gamma)}{(\xi \bar{\gamma})}$$

(14)

$$(1) \quad \xi, \zeta = \xi + \gamma \xi$$

sind zwei Kreise im R_n , die sich in γ berühren.

Nehmen wir einen Punkt η auf ζ , dann ergibt sich

$$(\zeta\eta) = (\xi\eta) + \gamma(\xi\eta)$$

d. h.

$$0 = (\hat{\xi}\eta) + \gamma(\xi\eta)$$

$$(2) \quad \therefore \gamma = -\frac{(\hat{\xi}\eta)}{(\xi\eta)}.$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \zeta = \xi - \frac{(\hat{\xi}\eta)}{(\xi\eta)} \xi.$$

Nehmen wir zwei Punkte η_1, η_2 anstatt η , dann folgt aus (3)

$$(4) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \xi - \frac{(\hat{\xi}\eta_1)}{(\xi\eta_1)} \xi, \\ \zeta_2 = \xi - \frac{(\hat{\xi}\eta_2)}{(\xi\eta_2)} \xi. \end{cases}$$

d. h.

$$(5) \quad \frac{\zeta_1 - \hat{\xi}}{\zeta_2 - \hat{\xi}} = \frac{(\hat{\xi}\eta_1)(\xi\eta_2)}{(\hat{\xi}\eta_2)(\xi\eta_1)}.$$

(5) ist die Bedingung dafür, dass zwei Kreise ζ_1, ζ_2 , worauf zwei Punkte η_1, η_2 liegen, den Kreis $\hat{\xi}$ in ξ berühren.

(15)

Betrachten wir drei Kreise ξ, η, ζ , die durch zwei feste Punkte hindurch gehen, dann folgt

$$(1) \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0,$$

wobei λ, μ, ν drei skalare Grössen sind.

Für einen andern Kreis β ergibt sich

$$(2) \quad \lambda(\hat{\xi}\beta) + \mu(\eta\beta) + \nu(\zeta\beta) = 0.$$

Nehmen wir noch einen andern Kreis γ anstatt β , dann folgt

$$(3) \quad \lambda(\hat{\xi}\gamma) + \mu(\eta\gamma) + \nu(\zeta\gamma) = 0.$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ (\xi\delta) & (\eta\delta) & (\zeta\delta) \\ (\xi\gamma) & (\eta\gamma) & (\zeta\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung⁽¹⁾ ist eine Bedingung dafür, dass dieselbe zwischen fünf Kreisen $\xi, \eta, \zeta, \delta, \gamma$ bestehen müsse, wobei drei Kreise ξ, η, ζ zwei feste Punkte hindurch gehen.

Ist ξ ein Kreis im R_2 und δ ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(1) \quad \eta = 2(\delta\xi)\xi - \delta$$

der zu δ in bezug auf den Kreis ξ inverse Punkt.

Gleichfalls ist

$$(2) \quad \bar{\eta} = 2(\eta\xi)\xi - \eta$$

der zu η in bezug auf den Kreis ξ inverse Punkt.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= 2(2(\delta\xi)\xi - \delta, \xi)\xi - \{2(\delta\xi)\xi - \delta\} \\ &= 4(\delta\xi)\xi - 2(\xi\delta) - 2(\delta\xi)\xi + \delta \\ &= \delta, \end{aligned}$$

so folgt der

Satz: Ein inverser Punkt von einem Inversen Punkt in bezug auf denselben Kreis ist derselbe Punkt.

(16)

Betrachten wir einen Kreisbüschel

$$(1) \quad \xi_1 + \lambda \xi_2$$

wo ξ_1, ξ_2 zwei Kreise im R_2 und λ skalare Größen ist.

(1) Vergl. PIERCE, J. W.: Invariants of sets of Points under Inversion, American Journal of Math. LI (1929) p. 599.

$$(2) \quad \eta = 2(x_1 + \lambda x_2, \xi) \xi = \{x_1 + \lambda x_2\}$$

ist der zu

$$x_1 + \lambda x_2$$

in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inverse Kreis.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \begin{aligned} \eta &= 2(x_1 \xi) - x_1 + \lambda \{2(x_2 \xi) \xi - x_2\} \\ &= \eta_1 + \lambda \eta_2 \end{aligned}$$

wobei η_1, η_2 die zu

$$x_1 \text{ bzw. } x_2$$

in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inversen Kreise sind.

Aus (3) folgt der

Satz: *Durch eine Inversion transformiert sich der Kreisbüschel zum Kreisbüschel.*

(17)

Ist $\hat{\xi}$ ein Kreis und \mathfrak{z} ein nicht auf ihm liegender Kreis, so ist

$$(1) \quad \eta = 2(\mathfrak{z} \hat{\xi}) \hat{\xi} - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inverse Kreis.

Wenn \mathfrak{z} gleich η , d. h. \mathfrak{z} ein Kreis ist, ist, der durch Inversion invariant ist, dann folgt aus (1)

$$(2) \quad \mathfrak{z} = 2(\mathfrak{z} \hat{\xi}) \hat{\xi} - \mathfrak{z}$$

d. h.

$$(3) \quad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z} \hat{\xi}) \hat{\xi}$$

Wenn $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(t)$ ist, wobei t ein Parameter ist, dann folgt aus (3)

$$(4) \quad \mathfrak{z}(t) = (\mathfrak{z}(t), \hat{\xi}) \hat{\xi}.$$

$\dot{\mathfrak{z}}$, wobei $\dot{\mathfrak{z}} = (\dot{\mathfrak{z}} \hat{\xi}) \hat{\xi}$ ist, ist dann der Berührungspunkt von \mathfrak{z} mit $\mathfrak{z} + \dot{\mathfrak{z}} dt$.
Kreise $\mathfrak{z}(t)$ sind dann die Schmiegkreise⁽¹⁾ der Kurve $\dot{\mathfrak{z}}(t)$.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1926), S. 126.

Es sei $(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}})=0$, bei denen sich konsekutive Kreise berühren, dann ist

$$(\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}})=0;$$

also steht \mathfrak{z} auf $\dot{\mathfrak{z}}$ senkrecht, der Querkreis der Schar.

(18)

Wenn

$$(\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}})=0$$

in

$$\mathfrak{y}=2(\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}})\dot{\mathfrak{z}}-\mathfrak{z},$$

dann

$$\mathfrak{y}=-\mathfrak{z}.$$

Aus $(\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}})=0$ folgt $(-\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{z}})=0$, d.h. $(\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{z}})=0$, daher folgt der

Satz: Wenn \mathfrak{z} zu $\dot{\mathfrak{z}}$ senkrecht durch Inversion ist, dann muss \mathfrak{y} auch zu $\dot{\mathfrak{z}}$ senkrecht sein.

(19)

Aus⁽¹⁾

$$\mathfrak{y}_1=2(\mathfrak{z}_1\dot{\mathfrak{z}})\dot{\mathfrak{z}}-\mathfrak{z}_1,$$

$$\mathfrak{y}_2=2(\mathfrak{z}_2\dot{\mathfrak{z}})\dot{\mathfrak{z}}-\mathfrak{z}_2,$$

folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2) &= 4(\mathfrak{z}_1\dot{\mathfrak{z}})(\mathfrak{z}_2\dot{\mathfrak{z}})(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}) + (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) - \\ &\quad - 2(\mathfrak{z}_1\dot{\mathfrak{z}})(\mathfrak{z}_2\dot{\mathfrak{z}}) - 2(\mathfrak{z}_1\dot{\mathfrak{z}})(\mathfrak{z}_2\dot{\mathfrak{z}}) \\ &= (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2), \end{aligned}$$

denn

$$(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}})=1.$$

So folgt der

Satz:⁽²⁾ Durch Inversion bleibt der Winkel invariant.

(1) Vergl. (13).

(2) COOLIDGE, J. L.: A Treatise on the Circle and the Sphere, Oxford (1916), p. 24.

昭和八年九月二十八日印刷
昭和八年九月三十日發行

編纂兼發行者 臺北帝國大學理農學部

印刷者 劉 川 官
臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社
臺北市橋南町ノ五二

購買申込所 株式會社臺灣日日新報社
臺北市橋南町ノ五二

代 理 丸 善 株 式 會 社
東京市日本橋區二丁目

L.A.R.1. 75

INDIAN AGRICULTURAL RESEARCH
INSTITUTE LIBRARY, NEW DELHI.

[illegible]

GIPNLK-H-40 I.A.R.I.-29-4-5-15,000